

ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ: ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И АСИМПТОТИКИ

В.В. Булатов, Ю.В. Владимиров

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

internalwave@mail.ru

Аннотация. Рассматривается поле внутренних гравитационных волн в клиновидной области стратифицированной среды. С использованием преобразования Канторовича–Лебедева получены точные решения, описывающие отдельную моду и полное волновое поле. Построены ВКБ асимптотики отдельной волновой моды, которые выражаются через гипергеометрическую функцию, и асимптотики полного волнового поля, выражающиеся через полулогарифмическую функцию. Для параметров стратифицированной среды, характерных для динамики океана, приведены результаты численных расчетов волновых полей по точным и асимптотическим формулам.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМЫ РЕШЕНИЯ

В основе анализа волновых движений стратифицированных сред, как правило, лежат асимптотические методы, позволяющие в дальнейшем решать задачи для возмущенных уравнений, которые могут учитывать эффекты нелинейности, неоднородности и нестационарности природных стратифицированных сред. Для исследования волновой динамики таких сред эффективны лишь численные методы. Однако в ряде случаев первоначальное представление об изучаемом круге явлений можно получить и на основе более простых асимптотических моделей и аналитических методов их исследования, позволяющих проследить соотношение различных волновых явлений и установить их взаимосвязь. В работе исследованы не рассматриваемые ранее точные решения, описывающие динамику волновых возмущений от точечного источника возмущений в клиновидной области стратифицированной среды. В силу значительных математических трудностей ранее удавалось построить только асимптотические представления волновых полей или точные решения для монохроматических волн [1–3]. В рамках линейной теории исследуются внутренние гравитационные волны в невязкой, несжимаемой неоднородной жидкости с невозмущенной плотностью $\rho_0(z)$, ограниченной твердой поверхностью $z=0$ и дном $z=\gamma y$ (ось z направлена вверх, γ – наклон дна). В точке $x=x_0, y=y_0, z=z_0$, находящейся внутри этой клиновидной области, имеется точечный источник массы мощностью Q и временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$. Система уравнений гидродинамики для малых возмущений плотности ρ^* , давления p^* и компонент скорости (u_1, u_2, w) имеет вид:

$$\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial p^*}{\partial x}, \quad \rho_0 \frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{\partial p^*}{\partial y}, \quad \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p^*}{\partial z} + g\rho^*$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = Q^* \exp(-i\omega t), \quad Q^* = Q\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0), \quad \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + w \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0$$

В качестве граничных условий используется условие «твердой крышки» на поверхности и условие непротекания на дне: $z=0: w=0, z=-\gamma y: w+u_2\gamma=0$. Предполагая гармоническую зависимость всех решений от времени: $(p^*, \rho^*, u_1, u_2, w) = \exp(-i\omega t)(p, \rho, U_1, U_2, W)$, получим: $U_1 = \frac{1}{i\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, U_2 = \frac{1}{i\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}$,

$$W = -\frac{c^2}{i\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \rho = \frac{W}{i\omega} \frac{\partial \rho_0}{\partial z}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = Q^*, \quad c^2 = \frac{\omega^2}{N^2 - \omega^2}, \quad \text{где } N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \text{ – частота Брента-Вайсяля, которая в дальнейшем предполагается постоянной.}$$

В приближении Буссинеска система сводится к одному уравнению, например для возмущенного давления p , с соответствующими граничными условиями:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) = -\frac{i\omega Q^* \rho_0}{c^2}, \quad z=0: \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad z=-\gamma y: \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

После замены переменных: $y = r \operatorname{ch} \varphi, z = -cr \operatorname{sh} \varphi, r = \sqrt{(y^2 - z^2)c^{-2}}, \varphi = \ln((cy - z)/(cy + z))/2$, можно осуществить преобразование Фурье по переменной x (не умаляя общности, далее $x_0=0$). Для Фурье-образа $P(r, \varphi, l)$ функции $p(r, \varphi, x)$ получаем следующую плоскую краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{\partial P}{r \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} - l^2 P = \frac{q}{r} \delta(r-r_0)\delta(\varphi-\varphi_0), \quad \varphi=0: \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0, \quad \varphi=\varphi_r: \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0$$

$$r_0 = (y_0^2 - z_0^2) / c^2, \quad \varphi_0 = \frac{1}{2} \ln((c y_0 - z_0) / (c y_0 + z_0)), \quad \varphi_r = \frac{1}{2} \ln((c + \gamma) / (c - \gamma)), \quad q = i\omega Q \rho_0 / c$$

Решение полученной трехмерной краевой задачи в переменных (r, φ, x) получается из решения плоской

задачи с помощью обратного преобразования Фурье: $p(r, \varphi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(r, \varphi, l) \exp(ilx) dl$. Далее будем полагать, что наклон дна γ меньше c , или, используя известную терминологию, считать наклон дна докритическим: критический наклон $\gamma = c$ [1,2].

Полученное однородное уравнение с нулевой правой частью имеет убывающие на бесконечности действительные решения: $P(r, \varphi, l) = K_{i\mu}(lr) \cos(\mu\varphi)$, где μ – любое действительное число, $K_{i\mu}(lr)$ – функция МакДональда мнимого индекса, удовлетворяющая параметрическому модифицированному уравнению Бесселя, вещественная при вещественных значениях μ и положительном аргументе lr . Исходя из этого, для представления дельта функции $\delta(r - r_0)$ воспользуемся парой прямого и обратного преобразования Канторовича–Лебедева:

$$F(\mu) = \int_0^{+\infty} K_{i\mu}(x) \frac{f(x)}{x} dx, \quad f(x) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \text{sh}(\pi\mu) K_{i\mu}(x) F(\mu) \mu d\mu.$$

Тогда решение задачи имеет вид

$$P(r, \varphi, l) = \frac{2q}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \text{sh}(\pi\mu) K_{i\mu}(lr) K_{i\mu}(lr_0) \Phi_\mu(\varphi) \mu d\mu, \quad \Phi_\mu(\varphi) = -\frac{1}{\mu^2 \varphi_r} - \frac{2}{\varphi_r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\varphi\mu_n) \cos(\varphi_0\mu_n)}{\mu^2 - \mu_n^2},$$

$$\mu_n = 2\pi n / \ln((c + \gamma) / (c - \gamma)), \quad n \geq 1.$$

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ, АСИМПТОТИКИ ОТДЕЛЬНОЙ МОДЫ И ПОЛНОГО ПОЛЯ

Отдельная волновая мода для давления $p_n(r, \varphi, x)$ выражается через гамма-функцию $\Gamma(z)$ и гипергеометрическую функцию

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \tau^2): p_n(r, \varphi, x) = -\frac{q \varepsilon_n}{\sqrt{\pi} r_0 \varphi_r} \cos(\varphi\mu_n) \cos(\varphi_0\mu_n) \text{Re} Z, \quad Z = \frac{\Gamma(i\mu_n + 1/2)}{\Gamma(i\mu_n + 1)} (\tau/2)^{i\mu_n + 1/2} F(\alpha, \beta, \gamma, \tau^2),$$

$$\alpha = \frac{i\mu_n + 1/2}{2}, \quad \beta = \frac{i\mu_n + 3/2}{2}, \quad \gamma = i\mu_n + 1, \quad \tau = 2r r_0 / (r^2 + r_0^2 + x^2), \quad n=0: \varepsilon_n = 1/2, \quad n \geq 1: \varepsilon_n = 1.$$

Выражение для ВКБ асимптотики при больших значениях μ_n отдельной волновой моды давления имеет

$$\text{вид: } p_n(r, \varphi, x) \approx -\frac{q\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\mu_n\pi} r_0} \frac{\cos(\varphi\mu_n) \cos(\varphi_0\mu_n)}{\varphi_r} \cos\left(\frac{\mu_n \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \tau^2}}{1 - \sqrt{1 - \tau^2}} + \frac{\pi}{4}}{2}\right).$$
 Полное решение получается

суммированием всех волновых мод: $p(r, \varphi, x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(r, \varphi, x)$ и выражается через полулогарифмическую

$$\text{функцию } Li_{1/2}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}} \text{ в виде } (B_{\pm}^{\pm} = \exp(\frac{i\pi(\pm\varphi \pm \varphi_0 + A(\tau))}{\varphi_r}), A(\tau) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - \tau^2}}{1 + \sqrt{1 - \tau^2}}):$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(r, \varphi, x) = -\frac{q\sqrt{\tau} \exp(-i\pi/4)}{8\pi^4 \sqrt{1 - \tau^2} \sqrt{r r_0} \varphi_r} (Li_{1/2}(B_{+}^{+}) + Li_{1/2}(B_{-}^{-}) + Li_{1/2}(B_{+}^{-}) + Li_{1/2}(B_{-}^{+}))$$

Полулогарифмическая функция обращается в бесконечность в точках, где выполнено условие $\pi(\pm\varphi \pm \varphi_0 + A(\tau)) / \varphi_r = 2\pi n, m = 0, 1, 2, \dots$. Геометрическое место точек (x, y, z) , удовлетворяющих данному условию, определяет систему лучей при фиксированной одной переменной. В плоскостях (y, z) и (x, z) эти соотношения определяют пару восходящих от источника лучей и пару нисходящих лучей с последующим их отражением от наклонного дна. На рис. 1а изображена теневая картина полного волнового поля (линии уровня, суммирование 50 мод) в плоскости (y, z) при следующих параметрах, характерных для динамики океана: $N = 0.001 \text{ с}^{-1}$, $\omega = 0.004 \text{ с}^{-1}$, $\gamma = 0.2$, $c = 0.44$, $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $Q = 1600 \text{ м}^3/\text{с}$. Из представленных численных результатов отчетливо видна лучевая структура построенных решений, в частности, совокупность падающих и отраженных лучей, и кроме того, котангенс угла наклона лучей к вертикали примерно равен 0.44 в полном соответствии с лучевой теорией, согласно которой направление групповой скорости

Θ , а следовательно и направление распространения энергии определяется из равенства: $\operatorname{ctg}^2 \Theta = c^2 = \omega^2 / (N^2 - \omega^2)^2$. Сингулярность решения на лучах обусловлена погрешностью использованной модели идеальной среды. Основной вклад в сингулярность дает бесконечное число коротковолновых мод с большими номерами. Для получения полного волнового поля надо учитывать конечное число мод, и это число приближенно определяется характерным масштабом Стокса $D = \sqrt{2\nu_0 / N}$, где ν_0 – кинематическая вязкость. Очевидно, что волновые моды с большими номерами, длина волны которых меньше D , вклада в решение не дают. На рис. 1б изображена теневая картина суммы 50 волновых мод в плоскости (x, y) . Отсюда, в частности, видна картина отражения линий постоянной фазы $2\pi k, k=1, 2, \dots$ от линии дна $z = -50$ м, $y = -z/\gamma = 250$ м. Результаты численного моделирования полной системы уравнений гидродинамики, описывающей эволюцию нелинейных волновых возмущений над неровным океаническим дном, а также данные натурных наблюдений в ряде районов Мирового океана показывают, что, действительно, полученные волновые картины с ярко выраженной лучевой структурой могут наблюдаться в реальных условиях [4]. В частности, аналитические, численные и натурные данные показывают, что ширина волновых пучков уменьшается при приближении к берегу. Формально, в линейной постановке, ширина отраженного пучка внутренних волн может стать сколь угодно малой при соответствующих соотношениях параметров среды (стратификация, угол наклона дна), то есть происходит существенная локальная интенсификация волн вблизи берега. Однако очевидно, что в реальных природных стратифицированных средах (океан, атмосфера), энергия волнового поля остается в таких пространственных областях конечной – включаются нелинейные механизмы диссипации и турбулентного перемешивания. В заключение отметим, что построенные с использованием преобразования Канторовича–Лебедева решения – точные, причем характерные лучевые картины волновых полей внутренних гравитационных волн в клиновидной области стратифицированной среды получены без использования математического аппарата геометрической оптики.

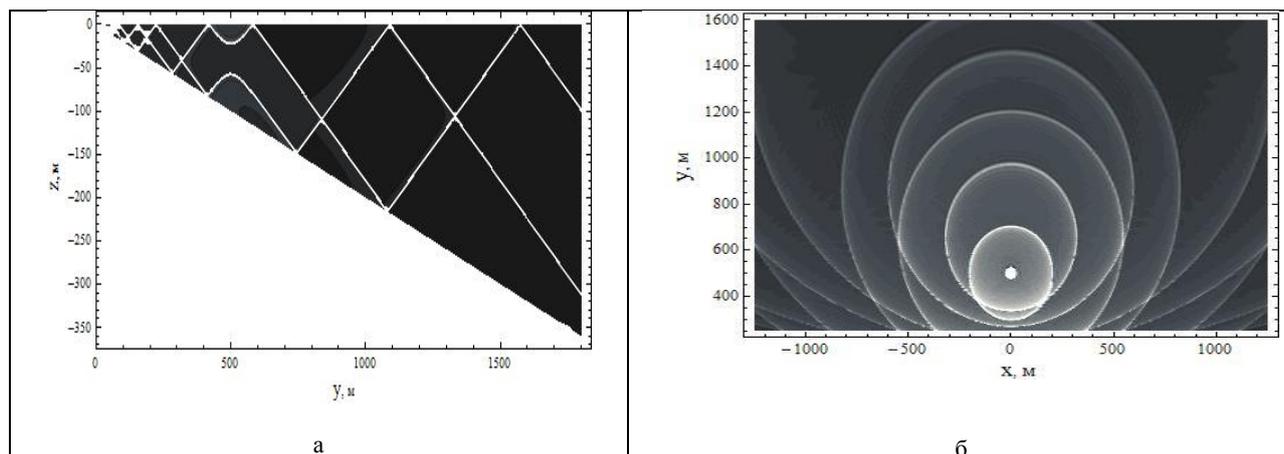


Рис. 1

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №14-01-00466.

Литература

1. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78 (5). С. 690-699.
2. Владимиров Ю.В. // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2012. № 5. С. 73-79.
3. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. // IUTAM Procedia. 2013. No 8. P. 229-237.
4. Mauge R., Gerkema T. // Nonlinear Processes Geophysics. 2008. V. 15. P. 233-244.