

УДК 532.59:534.1

**РАВНОМЕРНЫЕ АСИМПТОТИКИ ДАЛЬНИХ ПОЛЕЙ
ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ ИСТОЧНИКА
В ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ**

© 2014 г. В. В. БУЛАТОВ, Ю. В. ВЛАДИМИРОВ, И. Ю. ВЛАДИМИРОВ

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва
e-mail: internalwave@mail.ru*

Поступила в редакцию 31.10.2013 г.

Рассмотрена задача о построении равномерных асимптотик дальних полей поверхностных возмущений от локализованного источника в тяжелой однородной жидкости бесконечной глубины. Полученные решения описывают волновые возмущения как внутри, так и вне волнового клина Кельвина и выражаются через функцию Эйри и ее производные. Приведены результаты численных расчетов волновых картин.

Ключевые слова: тяжелая жидкость, возмущение поверхности, клин Кельвина, дальние поля, равномерная асимптотика.

На состояние свободной поверхности океана влияют как находящиеся в толще воды неоднородности (обтекаемые препятствия, изменения рельефа дна, полей плотности и течений), так и различные источники возмущений [1, 2]. Для правильной интерпретации данных, полученных при дистанционном зондировании морской поверхности, нужно знать причины, вызывающие те или иные поверхностные явления. В настоящее время актуальной остается задача исследования процессов поверхностных колебаний в неоднородной по плотности и нестационарной морской среде и согласования результатов моделирования с видимыми поверхностными волнениями. Для детального описания широкого круга физических явлений, связанных с динамикой поверхностных возмущений неоднородных и нестационарных природных сред, необходимо исходить из достаточно развитых математических моделей. Эти модели, как правило, оказываются весьма сложными, нелинейными, многопараметрическими, и для их полного исследования эффективны лишь численные методы [3–7].

Однако в ряде случаев первоначальное качественное представление об изучаемом круге явлений можно получить и на основе более простых асимптотических моделей и аналитических методов их исследования. Эти модели и методы в дальнейшем входят в тот набор “блоков”, из которых складывается общая картина волновой динамики [6–8]. В этой связи необходимо отметить классические задачи гидродинамики о построении асимптотических решений, описывающих эволюцию поверхностных возмущений, возбуждаемых локализованными источниками в тяжелой однородной жидкости [8–11]. Построенные модельные решения позволяют в дальнейшем, с использованием средств компьютерной математики, получить асимптотические представления волновых полей с учетом изменчивости и нестационарности реальных природных сред [8, 9, 11].

В настоящей работе рассматривается задача о построении равномерных асимптотик дальних полей поверхностных возмущений, возбуждаемых локализованным источником в тяжелой однородной жидкости бесконечной глубины.

1. Постановка задачи и интегральная форма решения для возвышения свободной поверхности. Рассматривается стационарная картина волновых возмущений на поверхности потока идеальной тяжелой жидкости бесконечной глубины, которая движется со скоростью V в положительном направлении оси x . Волны генерируются точечным источником, расположенным на глубине H (ось z направлена вверх от невозмущенной жидкости), мощность которого нарастает по закону $q = e^{\varepsilon t}$ ($-\infty < t < \infty$), и далее в полученном решении ищется предел при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом в силу линейности задачи для источника произвольной мощности $Q(Q = \text{const})$ достаточно результат, полученный для источника единичной мощности q (при $\varepsilon \rightarrow 0$), умножить на Q .

Возмущение потенциала $\Phi(x, y, z, t)$ относительно однородного потока, движущегося со скоростью V ($\nabla\Phi = (u, v, w)$, где u, v, w – компоненты возмущения вектора скорости $(V, 0, 0)$), описывается уравнением с соответствующим линеаризованным граничным условием на поверхности жидкости [3–5]

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(x, y, z, t) &= e^{\varepsilon t} \delta(x)\delta(y)\delta(z + H), \quad z < 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Phi + g\frac{\partial\Phi}{\partial z} &= 0, \quad z = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь Δ – трехмерный оператор Лапласа, а $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Возвышение свободной поверхности тяжелой жидкости $Z(x, y, t)$ связано с потенциалом $\Phi(x, y, z, t)$ условием [3, 4]

$$Z(x, y, t) = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x, y, z, t), \quad z = 0 \quad (1.2)$$

Решение задачи (1.1) ищется в виде $\Phi(x, y, z, t) = e^{\varepsilon t}\varphi(x, y, z)$, где функция $\varphi(x, y, z)$ определяется из задачи

$$\Delta\varphi(x, y, z) = \delta(x)\delta(y)\delta(z + H), \quad z < 0$$

$$\left(\varepsilon + V\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \varphi + g\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \quad z = 0$$

Фурье-образ потенциала $\varphi(x, y, z)$

$$\Omega(\mu, \nu, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu y} \varphi(x, y, z) dy$$

находится из краевой задачи ($k^2 = \mu^2 + \nu^2$)

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} - k^2 \Omega = \delta(z + H), \quad z < 0$$

$$(\varepsilon - i\mu V)^2 \Omega + g\frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0, \quad z = 0$$

$$\Omega \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty$$

решение которой при $z = 0$ имеет вид

$$\Omega(\mu, \nu, 0) = \frac{-g \exp(-kH)}{(\varepsilon - i\mu V)^2 + gk}$$

Тогда возвышение $\eta(x, y)(Z(x, y, t) = e^{st}\eta(x, y))$, учитывая соотношение (1.2), можно представить в виде

$$\eta(x, y) = \frac{iV}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivy} dv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu \exp(-kH - i\mu x) d\mu}{\mu^2 V^2 + 2i\epsilon\mu V - gk} \quad (1.3)$$

В выражении (1.3) параметр ϵ сохранен только в одном члене знаменателя, это нужно для определения смещения полюса подынтегрального выражения относительно действительной оси (в верхнюю или нижнюю полуплоскость).

2. Построение неравномерной асимптотики решения: интегрирование с помощью вычетов и метода стационарной фазы. В полярных координатах ($x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$), ($\mu = k\cos\psi$, $y = k\sin\psi$) выражение (1.3) можно представить в виде

$$\eta(r, \alpha) = \frac{iV}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \cos\psi \, d\psi \int_0^{\infty} \frac{k \exp(-kH - ikr \cos(\psi - \alpha)) dk}{k^2 V^2 \cos^2 \psi + 2i\epsilon V \cos \psi - g} \quad (2.1)$$

Далее исследуется выражение для возвышения $\eta(r, \alpha)$ при больших значениях r (точнее, при $gr/V^2 \gg 1$). Подынтегральное выражение по переменной интегрирования k имеет простой полюс: $k^* = gA^{-2} - 2i\epsilon A^{-1}$, $A = V \cos \psi$, который при значениях $\cos\psi < 0$ смещен в верхнюю полуплоскость, а при $\cos\psi > 0$ – в нижнюю. Функцию $\eta(r, \alpha)$ можно представить в виде суммы двух слагаемых: $\eta(r, \alpha) = \eta_1(r, \alpha) + \eta_2(r, \alpha)$, при этом в слагаемом $\eta_1(r, \alpha)$ интегрирование по ψ производится в области, где $\cos\psi < 0$, а в слагаемом $\eta_2(r, \alpha)$ – в области, где $\cos\psi > 0$.

Для вычисления слагаемого $\eta_1(r, \alpha)$ при $\cos(\psi - \alpha) < 0$ контур интегрирования по k можно повернуть на $\pi/2$ и совместить с положительным направлением мнимой оси на комплексной плоскости k (вычет в полюсе k^* учитывается), а при $\cos(\psi - \alpha) > 0$ контур поворачивается $-\pi/2$, при этом он совпадает с отрицательным направлением мнимой оси и вычет не учитывается. Можно показать, что и в том, и в другом случае интеграл вдоль мнимой оси имеет порядок $O(1/r^2)$ при $r \rightarrow \infty$. В результате слагаемое $\eta_1(r, \alpha)$ имеет вид

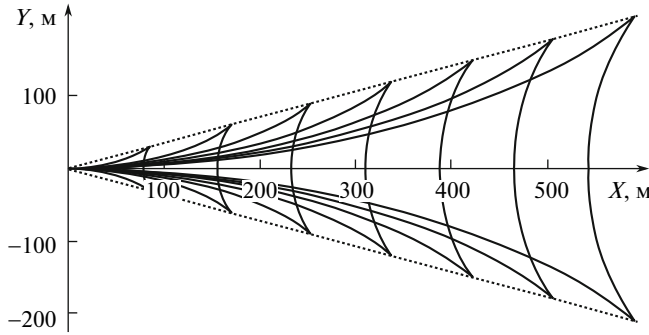
$$\eta_1(r, \alpha) = -\frac{g}{2\pi V^3} \int_{\pi/2+\alpha}^{3\pi/2} \cos^{-3}\psi \exp\left(-\frac{gH}{V^2 \cos^2 \psi}\right) d\psi + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Аналогичным образом можно найти слагаемое $\eta_2(r, \alpha)$, которое комплексно сопряжено с $\eta_1(r, \alpha)$. Окончательно выражение для возвышения $\eta(r, \alpha)$ можно представить как

$$\eta(r, \alpha) = -\frac{g}{\pi V^3} \int_{\pi/2+\alpha}^{3\pi/2} \cos^{-3}\psi \exp\left(-\frac{gH}{V^2 \cos^2 \psi}\right) \cos(rS(\psi, \alpha)) d\psi \quad (2.2)$$

$$S(\psi, \alpha) = \frac{g \cos(\psi - \alpha)}{V^2 \cos^2 \psi}$$

Интеграл (2.2) – четная функция по α . Тогда асимптотику интеграла (2.2) при больших значениях r можно вычислить при помощи метода стационарной фазы, и для этого необходимо найти точки стационарности фазы, т.е. корни уравнения $S'_\psi(\psi, \alpha) = 0$. На интервале интегрирования ($\pi/2 + \alpha, 3\pi/2$) лежат две стационарные точки: при $\alpha > 0$



Фиг. 1. Линии равной фазы (разность фаз между гребнями 2π)

$\psi_1(\alpha) = \pi/2 + \alpha/2 + b$ и $\psi_2(\alpha) = \pi + \alpha/2 - b$, ($\psi_1(\alpha) < \psi_2(\alpha)$), при $\alpha < 0$ $\psi_1(\alpha) = 3\pi/2 + \alpha/2 + b$ и $\psi_2(\alpha) = \pi + \alpha/2 - b$, ($\psi_1(\alpha) > \psi_2(\alpha)$), $b = \arcsin(3 \sin \alpha)/2$. Стационарные точки существуют только при значениях α , лежащих в интервале $-\arcsin(1/3) < \alpha < \arcsin(1/3)$. Это условие определяет на поверхности тяжелой жидкости область, в которой присутствуют волновые движения – клин Кельвина [3–5].

Зная стационарные точки, можно легко получить хорошо известную картину гребней “корабельных волн” внутри клина Кельвина в полярных координатах $r = -2\pi n/S(\psi_1(\alpha), \alpha)$ и $r = -2\pi n/S(\psi_2(\alpha), \alpha)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ При этом первое равенство (стационарная точка $\psi_1(\alpha)$) отвечает за продольные гребни, а второе (стационарная точка $\psi_2(\alpha)$) – за поперечные. Знак минус берется потому, что фаза в стационарных точках отрицательна.

На фиг. 1 изображена картина линий равной фазы (гребней), разность фаз между соседними гребнями равна 2π . Здесь и в дальнейшем параметры расчетов, характерные для реальных океанических условий [1, 2], были следующие: $V = 11$ м/с, $H = 6$ м.

Асимптотика интеграла (2.2) при $r \rightarrow \infty$, вычисленная с помощью метода стационарной фазы, имеет вид

$$\eta(r, \alpha) = -\frac{g}{V^3} \sum_{j=1}^r \sqrt{\frac{2}{\pi r |S_{\psi\psi}(\psi_j, \alpha)|}} \cos^{-3} \psi_j \exp\left(-\frac{gH}{V^2 \cos^2 \psi_j}\right) \cos(\Lambda) \quad (2.3)$$

$$\Lambda = rS(\psi_j, \alpha) + \frac{\pi}{4} \text{Sign} S_{\psi\psi}(\psi_j, \alpha)$$

$$\text{Sign } S_{\psi\psi}(\psi_1, \alpha) = +1, \quad \text{Sign } S_{\psi\psi}(\psi_2, \alpha) = -1$$

Неравномерная асимптотика (2.3) работает только внутри клина при $-\alpha^* < \alpha < \alpha^*$ (в этом интервале присутствуют стационарные точки) и перестает работать при приближении к границе клина, где стационарные точки сливаются, т.е. при $\alpha = \alpha^* = \arcsin 1/3$: $\psi_1(\alpha^*) = \psi_2(\alpha^*) = \alpha^*/2 + 3\pi/4$, и $S_{\psi\psi}(\psi_{1,2}(\alpha), \alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \alpha^*$.

3. Построение равномерной асимптотики решения. Равномерная асимптотика интеграла (2.2) описывает возвышение $\eta(r, \alpha)$ не только внутри волнового клина Кельвина, но и за его пределами, а также на самой границе клина. При этом равномерная асимптотика внутри клина должна совпадать с неравномерной асимптотикой (2.3), полученной с помощью метода стационарной фазы. Поскольку волновая картина для возвышения $\eta(r, \alpha)$ симметрична относительно оси x , т.е. $\eta(r, \alpha)$ – четная функция переменной α , далее рассматривается случай $\alpha > 0$.

Как показано выше, фазовая функция $S(\psi, \alpha)$ имеет две точки поворота: $\psi_1(\alpha)$ и $\psi_2(\alpha)$, которые при $\alpha \rightarrow \alpha^* = \arcsin(1/3)$ сливаются друг с другом: $\psi_1(\alpha^*) = \psi_2(\alpha^*) = 3\pi/4 + \alpha^*/2 = \psi^*$. Таким образом, для построения равномерной асимптотики необходимо решить классическую задачу об асимптотике интегралов с двумя сливающимися точками поворота. Следуя [6, 7, 12], интеграл (2.2) можно представить в виде

$$\eta(r, \alpha) = \int_{\pi/2+\alpha}^{3\pi/2} f(\psi) \cos(rS(\psi, \alpha)) d\psi \quad (3.1)$$

$$f(\psi) = -g \exp(-ghA^{-2})(\pi A^3)^{-1}$$

Далее используется неявная замена переменной интегрирования

$$S(\psi, \alpha) = a_0 + \sigma s - \frac{s^3}{3} \quad (3.2)$$

При этом стационарной точке $\psi_1(\alpha)$ будет соответствовать точка $s_1 = -\sqrt{\sigma}$, а точке $\psi_2(\alpha)$ – точка $s_2 = \sqrt{\sigma}$. Тогда из (3.2) можно получить

$$a_0(\alpha) = \frac{S(\psi_1) + S(\psi_2)}{2}, \quad \sigma(\alpha) = \left(\frac{3}{4} (S(\psi_2) - S(\psi_1)) \right)^{2/3} \quad (3.3)$$

Интеграл (3.1) при замене (3.2) имеет вид

$$\eta(r, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} G(s) \cos \left(r \left(a_0 + \sigma s - \frac{1}{3} s^3 \right) \right) ds \quad (3.4)$$

$$G(s) = f(\psi) \frac{d\psi}{ds}$$

Нижний предел в интеграле (3.4) на самом деле находится из (3.2) при $\psi = \pi/2 + \alpha$ и является корнем уравнения $a_0(\alpha) + \sigma(\alpha)s - s^3/3 = 0$. Данное уравнение имеет единственный действительный корень $s^*(\alpha)$, который, используя формулу Кардано, можно найти в явном виде

$$s^*(\alpha) = \left(\frac{3}{4} \right)^{1/3} [(\sqrt{S(\psi_2)} + \sqrt{S(\psi_1)})^{2/3} + (\sqrt{S(\psi_2)} - \sqrt{S(\psi_1)})^{2/3}]$$

где $s^*(\alpha) \rightarrow -\infty$ при $\alpha \rightarrow 0$, $s^*(\alpha) \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow \pi$. Возможность замены нижнего предела $s^*(\alpha)$ на $-\infty$ и оценка допускаемой при этом ошибки будут обсуждаться ниже.

Медленно меняющуюся функцию $G(s)$ в окрестности стационарных точек можно представить в виде (полное разложение приведено в [12])

$$G(s) = b_0 + b_1 s \quad (3.5)$$

$$b_0(\alpha) = \frac{G(\sqrt{\sigma}) + G(-\sqrt{\sigma})}{2}, \quad b_1(\alpha) = \frac{G(\sqrt{\sigma}) - G(-\sqrt{\sigma})}{2\sqrt{\sigma}} \quad (3.6)$$

Входящие в $G(\pm\sqrt{\sigma})$ значения $d\psi/ds$ находятся с помощью дифференцирования выражения (3.2) по переменной s

$$G(\sqrt{\sigma}) = f(\psi_2) \sqrt{\frac{-2\sqrt{\sigma(\alpha)}}{S\ddot{\psi}\psi(\psi_2, \alpha)}}, \quad G(-\sqrt{\sigma}) = f(\psi_1) \sqrt{\frac{2\sqrt{\sigma(\alpha)}}{S\ddot{\psi}\psi(\psi_1, \alpha)}} \quad (3.7)$$

Подставляя разложение (3.5) в выражение (3.4), можно получить

$$\mu(r, \alpha) = J_1(r, \alpha) + J_2(r, \alpha) \quad (3.8)$$

Здесь первое слагаемое выражается через функцию Эйри: $Ai(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(xt - t^3/3) dt$, а второе – через ее производную [12-14]

$$J_1(r, \alpha) = \frac{2\pi}{r^{1/3}} b_0(\alpha) \cos(ra_0(\alpha)) Ai(\sigma(\alpha)r^{2/3}) \quad (3.9)$$

$$J_2(r, \alpha) = \frac{2\pi}{r^{2/3}} b_1(\alpha) \sin(ra_0(\alpha)) Ai'(\sigma(\alpha)r^{2/3})$$

где $b_0(\alpha)$ и $b_1(\alpha)$ определены в (3.6), а $\sigma(\alpha)$ и $a_0(\alpha)$ – в (3.3).

Равномерная асимптотика (3.8) – четная функция относительно $\alpha = \pi/2$. Волновая картина также симметрична относительно оси Oy , что физически невозможно, так как далеко вверх по потоку возмущения отсутствуют. Происходит это из-за замены нижнего предела интегрирования в (3.4) $s^*(\alpha)$ на $-\infty$ (что соответствует замене нижнего предела в (2.2) $\pi/2 + \alpha$ на $\pi/2$). Тогда полученные интегралы выражаются через функцию Эйри и ее производную. При $0 < \alpha < \pi/2$ эта замена дает лишь добавку порядка $O(1/r^2)$, так как стационарные точки лежат на интервале $(s^*(\alpha), \infty)$. При $\pi/2 < \alpha < \pi$ такую замену производить нельзя, но можно показать, что исходный интеграл (2.2) имеет порядок $O(1/r^2)$ (в этом можно убедиться, дважды интегрируя (2.2) по частям).

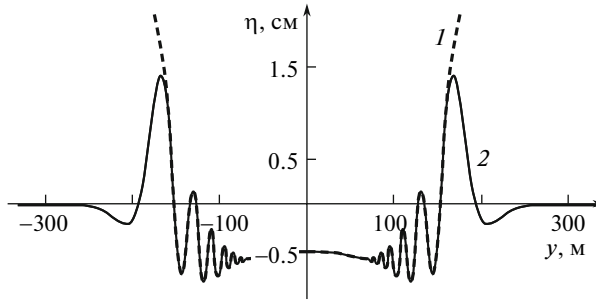
В результате в первом случае основной вклад в асимптотику интеграла (2.2) дают стационарные точки (порядок интеграла $O(1/r^{1/3})$), а во втором случае – лишь конечная точка интервала интегрирования $s^*(\alpha)$ (порядок интеграла $O(1/r^2)$). Таким образом, равномерная асимптотика (3.8) работает при больших значениях r и $0 < \alpha < \pi/2$, а при $\pi/2 < \alpha < \pi$ волновое поле убывает как $1/r^2$. Эта асимптотика регулярна на границе клина при $\alpha = \alpha^*$, где $S(\psi) = 0$ и $S'(\psi) = 0$, при этом $b_0(\alpha^*) = G(0)$, $b_1(\alpha^*) = G'(0)$.

Для нахождения $G(0)$ надо убедиться в регулярности функции $d\psi/ds$ при $s = 0$, а для нахождения $G'(0)$ – в регулярности $d^2\psi/ds^2$ в нуле. Тогда, трижды и четырежды дифференцируя соотношение (3.2) по переменной ψ , можно получить

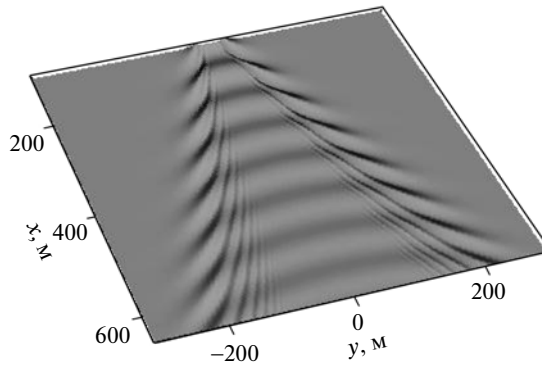
$$\frac{d\psi}{ds} = \left(-\frac{2}{S'''(\psi^*)} \right)^{1/3}, \quad s = 0$$

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} = -\frac{S^{IV}(\psi^*)}{\sigma S'''(\psi^*)} \left(-\frac{2}{S'''(\psi^*)} \right)^{2/3}, \quad s = 0$$

Равномерная асимптотика при больших значениях r и α , не очень близких к α^* , переходит в неравномерную асимптотику (2.3). В этом можно убедиться, взяв в (3.8) вместо функции Эйри и ее производной их асимптотики при больших положительных значениях аргумента ($x \rightarrow \infty$): $Ai(x) \sim x^{-1/4} \cos(T)/\sqrt{\pi}$, $Ai'(x) \sim x^{1/2} \sin(T)/\sqrt{\pi}$, $T = 2x^{3/2}/3 - \pi/4$ [13, 14]. Оба слагаемых в (3.8) тогда будут иметь порядок $O(1/\sqrt{r})$. Непо-



Фиг. 2. Поперечный срез поля возвышения (1 – стационарная фаза, 2 – равномерная асимптотика)



Фиг. 3. Поле возвышения на поверхности тяжелой жидкости (равномерная асимптотика)

средственно в окрестности границы клина в (3.8) можно оставить только первое слагаемое (порядка $O(1/r^{1/3})$), а вне клина оба слагаемых (как и их асимптотики) экспоненциально малы.

На фиг. 2 показан поперечный срез волнового поля возвышения ($x = 500$ м, $Q = 10^3$ м³/с), рассчитанный по формулам (2.3) и (3.8). На фиг. 3 показана трехмерная волновая картина поля возвышения на поверхности тяжелой жидкости, рассчитанная по формуле (3.8), т.е. равномерная асимптотика решения.

Заключение. Построенные асимптотические решения – равномерные и позволяют описывать дальние поля поверхностных возмущений от локализованных источников как вне, так и внутри волнового клина Кельвина. Полученные асимптотики дальних полей поверхностных волновых возмущений дают возможность эффективно рассчитывать основные характеристики волновых полей и, кроме того, качественно анализировать полученные решения. Тем самым открываются широкие возможности анализа волновых картин в целом, что важно для правильной постановки математических моделей волновой динамики, в том числе для проведения экспресс-оценок при натурных измерениях волновых полей в морской среде.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 14-01-00071, 14-01-00466, 14-08-00701).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поверхностные и внутренние волны в арктических морях / Под ред. Е.Г. Морозова. СПб.: Гидрометеоздат, 2002. 364 с.
2. *Коняев К.В., Сабинин К.Д.* Волны внутри океана. СПб.: Гидрометеоздат, 1992. 272 с.
3. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
4. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
5. *Pedlosky J.* Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin–Heidelberg: Springer, 2010. 260 p.
6. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. М.: Наука, 2010. 470 с.
7. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Wave dynamics of stratified mediums. М.: Наука, 2012. 584 с.
8. *Belov V.V., Dobrokhotov S.Yu., Tudorovskiy T.Ya.* Operator separation for adiabatic problems in quantum and wave mechanics // J. Eng. Mathem. 2006. V. 55. P. 183–237.
9. *Dobrokhotov S.Yu., Lozhnikov D.A., Vargas C.A.* Asymptotics of waves on the shallow water generated by spatially-localized sources and trapped by underwater ridges // Russ. J. Mathem. Phys. 2013. V. 20. P. 11–24.
10. *Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С.* Поверхностные эффекты при обтекании препятствий в неоднородно стратифицированной среде // Докл. Академии наук. 2011. Т. 440. № 6. С. 826–829.
11. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Дальние поля внутренних гравитационных волн в неоднородных и нестационарных стратифицированных средах // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2013. Т. 6. № 2. С. 55–70.
12. *Borovikov V.A.* Uniform stationary phase method. IEE electromagnetic waves. Series 40. London, 1984. 233 p.
13. *Abramowitz M., Stegun I.A.* Handbook of mathematical functions (Reprint of the 1972 ed.). N.Y.: Dover Publ. Inc., 1992.
14. *Watson G.N.* A treatise on the theory of Bessel functions (Reprint of the 2nd ed.). Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.