УДК 532.59: 534.1

© 2014 г. В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров

ТОЧНЫЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В КЛИНОВИДНОЙ ОБЛАСТИ

Рассматривается поле внутренних гравитационных волн в клиновидной области стратифицированной среды. С использованием преобразования Канторовича–Лебедева получены точные решения, описывающие отдельную моду и полное волновое поле. Построены ВКБ асимптотики отдельной волновой моды, которые выражаются через гипергеометрическую функцию, и асимптотики полного волнового поля, выражающиеся через полулогарифмическую функцию. Для параметров стратифицированной среды, характерных для динамики океана, приведены результаты численных расчетов волновых полей по точным и асимптотическим формулам. Оценены границы их применимости.

В основе анализа волновых движений стратифицированных сред, как правило, лежат асимптотические методы, позволяющие в дальнейшем решать задачи для возмущенных уравнений, которые могут учитывать эффекты нелинейности, неоднородности и нестационарности природных стратифицированных сред [1–3]. Для исследования волновой динамики таких сред эффективны лишь численные методы. Однако в ряде случаев первоначальное представление об изучаемом круге явлений можно получить и на основе более простых асимптотических моделей и аналитических методов их исследования, позволяющих проследить соотношение различных волновых явлений и установить их взаимосвязь [4–11]. В этой связи необходимо отметить задачи об эволюции негармонических волновых пакетов в плавнонеоднородной по горизонтали и нестационарной стратифицированной среде [2–3, 9–10]. Оказалось, что построенные модельные решения вполне согласуются с результатами натурных наблюдений волновых полей [2–4, 7, 8].

Представляет интерес исследовать не рассматриваемые ранее точные решения, описывающие динамику волновых возмущений от точечного источника в клиновидной области стратифицированной среды. В силу значительных математических трудностей ранее удавалось построить только асимптотические представления волновых полей или точные решения для монохроматических волн [10, 12].

1. Постановка задачи. В рамках линейной теории исследуются внутренние гравитационные волны в невязкой, несжимаемой неоднородной жидкости с невозмущенной плотностью $\rho_0(z)$, ограниченной твердой поверхностью $z = 0$ и дном $z = \gamma y$ (ось z направлена вверх, γ – наклон дна). В точке $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, находящейся внутри этой клиновидной области, имеется точечный источник массы мощностью Q с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$.

Система уравнений гидродинамики для малых возмущений плотности ρ^*, давления p^* и компонент скорости (u_1, u_2, w) имеет вид [1–3]

$$\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial p^*}{\partial x}, \quad \rho_0 \frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{\partial p^*}{\partial y}, \quad \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p^*}{\partial z} + g\rho^*$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = Q^* \exp(-i\omega t), \quad Q^* = Q\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + w\frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0$$

где g — ускорение силы тяжести. В качестве граничных условий используется условие “твердой крышки” на поверхности и условие непротекания на дне

$$z = 0\colon\ w = 0, \quad z = -\gamma y\colon\ w + u_2\gamma = 0 \tag{1.2}$$

Предполагая гармоническую зависимость всех решений от времени:

$$(p^*, \rho^*, u_1, u_2, w) = \exp(-i\omega t)(p, \rho, U_1, U_2, W)$$

получим

$$U_1 = \frac{1}{i\omega\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad U_2 = \frac{1}{i\omega\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad W = -\frac{c^2}{i\omega\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z}, \quad \rho = \frac{W}{i\omega}\frac{\partial \rho_0}{\partial z}$$
$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = Q^* \tag{1.3}$$
$$c^2 = \frac{\omega^2}{N^2 - \omega^2}, \quad N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial z}$$

Здесь $N(z)$ — частота Брента—Вяйсяля, которая в дальнейшем предполагается постоянной.

В приближении Буссинеска система (1.3) сводится к одному уравнению, например для возмущенного давления p, с граничными условиями:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) = -\frac{i\omega Q^* \rho_0}{c^2} \tag{1.4}$$

$$z = 0\colon\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad z = -\gamma y\colon\ \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\gamma}{c^2}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{1.5}$$

Под значением ρ_0 в правой части уравнения (1.4) в силу относительно малого изменения $\rho_0(z)$ в океане понимается, например, значение плотности морской воды на поверхности, т.е. далее $\rho_0 = \rho_0(0) = \mathrm{const}$ [1—3, 4, 7, 8]. Решение $p(x, y, z)$ должно стремиться к нулю при $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty$. После нахождения функции $p(x, y, z)$ компоненты скорости (U_1, U_2, W) можно найти из первых трех уравнений системы (1.3), а плотность ρ из четвертого уравнения этой системы.

2. Интегральные представления решений. Сделаем замену переменных

$$y = r\,\mathrm{ch}\,\varphi, \quad z = -cr\,\mathrm{sh}\,\varphi, \quad r = \sqrt{y^2 - \frac{z^2}{c^2}}, \quad \varphi = \frac{1}{2}\ln\frac{cy - z}{cy + z} \tag{2.1}$$

Осуществим преобразование Фурье по переменной x (не умаляя общности, положим далее $x_0 = 0$). Учитывая, что модуль якобиана перехода от координат (y, z) к (r, φ) равен cr, из задачи (1.4), (1.5) получим для Фурье-образа $P(r, \varphi, l)$ функции $p(r, \varphi, x)$ следующую плоскую краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{\partial P}{r\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} - l^2 P = \frac{q}{r}\delta(r - r_0)\delta(\varphi - \varphi_0) \tag{2.2}$$

$$\varphi = 0:\ \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0, \quad \varphi = \varphi_r:\ \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0 \tag{2.3}$$

$$r_0 = \sqrt{y_0^2 - \frac{z_0^2}{c^2}}, \quad \varphi_0 = \frac{1}{2}\ln\frac{c\,y_0 - z_0}{c\,y_0 + z_0}, \quad \varphi_r = \frac{1}{2}\ln\frac{c+\gamma}{c-\gamma}, \quad q = \frac{i\omega Q\rho_0}{c} \tag{2.4}$$

Решение трехмерной краевой задачи (1.4), (1.5) в переменных (r, φ, x) получается из решения плоской задачи (2.2), (2.3) с помощью обратного преобразования Фурье

$$p(r,\varphi,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} P(r,\varphi,l)\exp(ilx)dl \tag{2.5}$$

Далее будем полагать, что наклон дна γ меньше c, или, используя известную терминологию [6, 10, 12], считать наклон дна докритическим (критический наклон $\gamma = c$).

Однородное уравнение (2.2) с нулевой правой частью имеет убывающие на бесконечности действительные решения

$$P(r,\varphi,l) = K_{i\mu}(lr)\cos\mu\varphi$$

где μ — любое действительное число, $K_{i\mu}(lr)$ — функция МакДональда мнимого индекса, удовлетворяющая параметрическому модифицированному уравнению Бесселя, вещественная при вещественных значениях μ и положительном аргументе lr [13—15].

Исходя из этого, для представления дельта-функции $\delta(r - r_0)$ воспользуемся парой прямого и обратного преобразования Канторовича—Лебедева [13—15]

$$F(\mu) = \int_0^{+\infty} K_{i\mu}(x)\frac{f(x)}{x}dx, \quad f(x) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty} \operatorname{sh}\pi\mu\, K_{i\mu}(x)F(\mu)\mu d\mu$$

Решение задачи (2.2), (2.3) будем искать в виде

$$P(r,\varphi,l) = \frac{2q}{\pi^2}\int_0^{+\infty} \operatorname{sh}\pi\mu\, K_{i\mu}(lr)K_{i\mu}(lr_0)\Phi_\mu(\varphi)\mu d\mu \tag{2.6}$$

Подстановка разложения (2.6) в уравнение (2.2) приводит к следующей краевой задаче:

$$\frac{d^2\Phi_\mu(\varphi)}{d\varphi^2} + \mu^2\Phi_\mu(\varphi) = -\delta(\varphi - \varphi_0), \quad \frac{d\Phi_\mu(0)}{d\varphi} = \frac{d\Phi_\mu(\varphi_r)}{d\varphi} = 0$$

Видно, что $\Phi_\mu(\varphi)$ — угловая функция Грина:

$$\Phi_\mu(\varphi) = -\frac{1}{\mu^2\varphi_r} - \frac{2}{\varphi_r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\varphi\mu_n\cos\varphi_0\mu_n}{\mu^2 - \mu_n^2}; \quad \mu_n = 2\pi n\left(\ln\frac{c+\gamma}{c-\gamma}\right)^{-1}, \quad n \geq 1$$

3. Точное решение, асимптотики отдельной волновой моды и полного поля. Рассмотрим в выражении (2.6) отдельную волновую моду ($n \geq 1$)

$$P_n(r,\varphi,l) = -\frac{4\chi_n}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}\pi\mu\, K_{i\mu}(lr)K_{i\mu}(lr_0)}{\mu^2 - \mu_n^2}\mu d\mu$$
$$\chi_n = \frac{q\cos\varphi\mu_n\cos\varphi_0\mu_n}{\varphi_r} \tag{3.1}$$

Интеграл понимается в смысле главного значения. Формула (3.1) также пригодна и для случая $n = 0$, если в ней положить $\mu_0 = 0$, а коэффициент перед интегралом уменьшить в два раза.

Рассмотрим сначала случай $r > r_0$ (при $r < r_0$ интеграл (3.1) вычисляется аналогично). С целью деформирования контура интегрирования по μ в выражении (3.1) воспользуемся известной формулой ([13], формула 8.485), которая в рассматриваемой случае приобретает вид

$$K_{i\mu}(lr_0) = -\pi \operatorname{Im}(I_{i\mu}(lr_0))/\operatorname{sh}\pi\mu \tag{3.2}$$

так как функции $I_{i\mu}(x)$ и $I_{i\mu}(-x)$ – комплексно-сопряженные. Подынтегральная функция в равенстве (3.1) – четная по μ, поэтому с помощью соотношения (3.2) можно получить равенство

$$P_n(r,\varphi,l) = \frac{2\chi_n}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_{i\mu}(lr) I_{i\mu}(lr_0)}{\mu^2 - \mu_n^2} \mu d\mu \tag{3.3}$$

в котором контур интегрирования можно замкнуть в нижнюю полуплоскость. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся асимптотиками

$$K_\nu(lr) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}}\left(\frac{2\nu}{elr}\right)^\nu, \quad I_\nu(lr_0) \approx \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2\nu}}\left(\frac{2\nu}{elr_0}\right)^\nu \quad \text{при} \quad \mu = -i\nu, \quad \nu \to \infty$$

Тогда

$$K_\nu(lr) I_\nu(lr_0) \approx \frac{\pi}{4\nu\sqrt{2}} \exp(-\nu(\ln r - \ln r_0))$$

Учитывая вычеты в точках $\mu = \pm\mu_n$, получаем

$$P_n(r,\varphi,l) = -2\chi_n \operatorname{Re}(K_{i\mu_n}(lr) I_{i\mu_n}(lr_0)) \tag{3.4}$$

Полученные выражения можно объединить в одно:

$$P_n(r,\varphi,l) = -2\chi_n \operatorname{Re}(K_{i\mu_n}(lr_+) I_{i\mu_n}(lr_-)); \quad r_- = \min(r,r_0), \quad r_+ = \max(r,r_0) \tag{3.5}$$

Для случая $n = 0$ будем иметь

$$P_0(r,\varphi,l) = -\frac{q}{\varphi_r} \operatorname{Re}(K_0(lr_+) I_0(lr_-)) \tag{3.6}$$

После проведения обратного преобразование Фурье (2.5) для n-й моды ($n \geq 0$), учитывая, что установившаяся стоячая волна – четная функция по переменной x, получаем, что отдельная волновая мода $p_n(r,\varphi,x)$ выражается через гамма-функцию $\Gamma(z)$ и гипергеометрическую функцию $F(\alpha,\beta,\gamma,\tau^2)$ [13, 15]

$$\begin{gathered} p_n(r,\varphi,x) = -\frac{\varepsilon_n}{\sqrt{\pi r r_0}} \chi_n \operatorname{Re} Z, \quad \varepsilon_0 = 1/2, \quad \varepsilon_n = 1 \quad \text{при} \quad n \geq 1 \\ Z = \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{\tau}{2}\right)^{2\alpha} F(\alpha,\beta,\gamma,\tau^2), \quad \alpha = \frac{1/2 + i\mu_n}{2}, \quad \beta = \frac{3/2 + i\mu_n}{2}, \\ \gamma = 1 + i\mu_n, \quad \tau = \frac{2rr_0}{r^2 + r_0^2 + x^2} \end{gathered} \tag{3.7}$$

Полное решение получается суммированием всех мод:

$$p(r, \varphi, x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(r, \varphi, x)$$

Выражение для r и φ определяются из соотношений (2.1), а r_0, φ_0 и φ_r – из соотношений (2.4).

Заметим, что полю вдали от источника возмущений, т.е. большим значениям r и x, соответствуют малые τ, и отдельную моду $p_n(r, \varphi, x)$ можно аппроксимировать при помощи разложения гипергеометрической функции в ряд при $0 \le z < 1$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2!} z^2 + \ldots \tag{3.8}$$

Однако при фиксированном z с увеличением номера моды n в разложении (3.8) приходится брать все большее число членов ряда (количество членов $m \approx \mu_n z$), что затрудняет расчет волновых мод с большими номерами. Имея в виду дальнейшее суммирование ряда (3.8), воспользуемся ВКБ асимптотикой гипергеометрической функции и асимптотикой отношения гамма-функций при больших значениях μ_n, входящих в правую часть третьего равенства (3.7):

$$\begin{gathered} F(\tau^2) \approx \exp\left(-\frac{i\mu_n}{2}\left(\ln\frac{\tau^2}{4} + \ln\frac{1+\sqrt{1-\tau^2}}{1-\sqrt{1-\tau^2}}\right)\right)(1-\tau^2)^{-1.4} \\ \frac{\Gamma(1/2 + i\mu_n)}{\Gamma(1 + i\mu_n)} \approx \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{\mu_n}} \end{gathered} \tag{3.9}$$

Окончательно получаем следующее выражение для ВКБ асимптотики при больших значениях μ_n отдельной волновой моды:

$$p_n(r, \varphi, x) \approx -\frac{\sqrt{\tau}(1-\tau^2)^{-1/4}}{\sqrt{2\mu_n \pi r r_0}} \chi_n \cos\left(\frac{\mu_n}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-\tau^2}}{1-\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{\pi}{4}\right) \tag{3.10}$$

Если формально положить в разложении (3.8) $\mu_n \to \infty$, а в ВКБ асимптотике (3.9) для функции $F(z)$ считать, что $z \to 0$, и учесть, что $z\mu_n \approx O(1)$, то в обоих случаях получаем одинаковое значение, равное $\exp(iz\mu_n/4)$. Таким образом, разложения (3.8) и ВКБ асимптотика (3.9) внутренне согласованы, т.е. имеется область значений z, μ_n, где эти выражения совпадают. Из выражения (3.10) видно, что амплитуда n-й моды при больших x и y убывает как $((x^2 + y^2)n)^{-1/2}$. Раскладывая фазу в равенстве (3.10) при малых значениях τ, получим, что длина полуволны вдоль оси y при больших y растет как $\pi y/\mu_n$, вдоль оси x – как $\pi x/(2\mu_n)$.

Численные расчеты показывают хорошее совпадение точного и асимптотического решений, за исключением непосредственной окрестности источника возмущений, где аргумент гипергеометрической функции стремится к единице, что следует из построения асимптотического решения. Отметим, что выражение (3.10) формально пригодно при $\mu_n \to \infty$, однако уже для первой моды ($n = 1$) асимптотики (3.10) качественно верно описывает точные решения.

Асимптотику нулевой волновой моды можно вычислить, используя равенства (3.7) и полагая $\mu_n = 0$. Тогда при учете соотношений [13–15]

$$F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1, \tau^2\right) = \frac{2}{\pi\sqrt{1+\tau}} K\left(\frac{2\tau}{1+\tau}\right), \quad K(x) = \int_0^{\pi/2} (1 - (x \sin\varphi)^2)^{-1/2} d\varphi$$

имеем

$$p_0(r, \varphi, x) \approx -\frac{q\sqrt{\tau}}{\pi\sqrt{1+\tau}\sqrt{2rr_0\varphi_r}} K\left(\frac{2\tau}{1+\tau}\right) \quad (3.11)$$

и далее

$$p_0(r, \varphi, x) \approx -\frac{q\sqrt{\tau}}{\pi\sqrt{1+\tau}\sqrt{2rr_0\varphi_r}} \left(\ln 4 - \frac{1}{2}\ln\frac{1-\tau}{1+\tau}\right) \quad (3.12)$$

при использовании выражения для главного члена асимптотики эллиптического интеграла первого рода $K(x)$ при $x = 2\tau/(1+\tau) \to 1$.

Так как асимптотика эллиптического интеграла служит хорошим его приближением при стремлении аргумента к единице, то точное и асимптотическое решения для нулевой волновой моды полностью совпадают в окрестности источника возмущений, а вдали от источника существует некоторое различие. Тем не менее, в дальней зоне асимптотика качественно верно описывает точное решение с погрешностью, не превышающей нескольких процентов.

Полученные асимптотические представления решений для отдельных волновых мод, включая нулевую, дают возможность перейти к вычислению полного поля внутренних гравитационных волн в клине. Сумма асимптотик (3.10) бесконечного числа волновых мод ($n = 1, 2, \ldots$) выражается через полулогарифмическую функцию [13, 15]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(r, \varphi, x) = -\frac{q\sqrt{\tau}\exp(-i\pi/4)}{8\pi(1-\tau^2)^{1/4}\sqrt{rr_0\varphi_r}} (\mathrm{Li}_{1/2}(B_+^+) + \mathrm{Li}_{1/2}(B_-^+) + \mathrm{Li}_{1/2}(B_+^-) + \mathrm{Li}_{1/2}(B_-^-))$$

$$\mathrm{Li}_{1/2}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}} \quad (3.13)$$

$$B_\pm^\pm = \exp\left(i\pi\frac{\pm\varphi \pm \varphi_0 + A(\tau)}{\varphi_r}\right), \quad A(\tau) = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-\tau^2}}{1+\sqrt{1-\tau^2}}$$

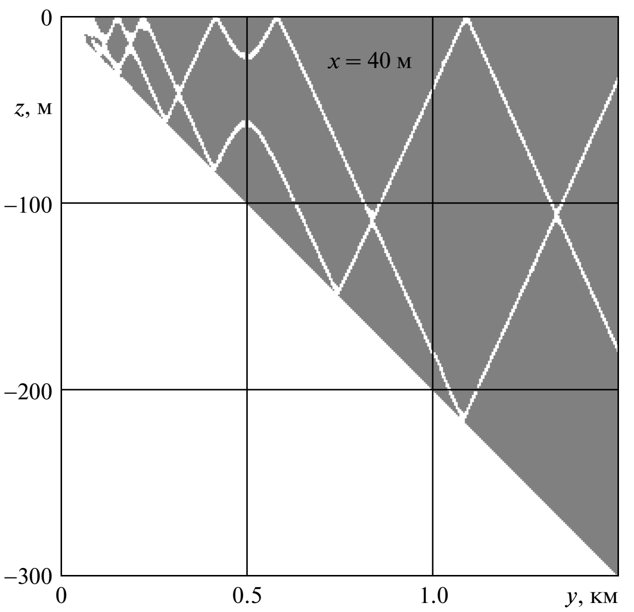
(верхний двойной индекс $\pm$ в левой части предпоследнего равенства отвечает знаку перед φ, нижний – знаку перед φ_0).

Тогда полное волновое поле определяется суммой действительной части выражения (3.13) и выражения (3.11). Полулогарифмическая функция в соотношении (3.13) обращается в бесконечность в точках, где выполнено условие

$$\pi\frac{\pm\varphi \pm \varphi_0 + A(\tau)}{\varphi_r} = 2\pi m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Геометрическое место точек (x, y, z), удовлетворяющих этому условию, определяет систему лучей при фиксированной одной переменной. В плоскостях (y, z) и (x, z) соответствующие соотношения определяют пару восходящих от источника лучей и пару нисходящих лучей с последующим их отражением от наклонного дна.

При следующих значениях параметров, характерных для динамики океана:



Фиг. 1

$$N = 0.001\ \text{с}^{-1}, \quad \omega = 0.0004\ \text{с}^{-1}, \quad \gamma = 0.2, \quad c = 0.44,$$
$$\rho_0 = 1000\ \text{кг/м}^3, \quad Q = 1600\ \text{м}^3/\text{с}$$

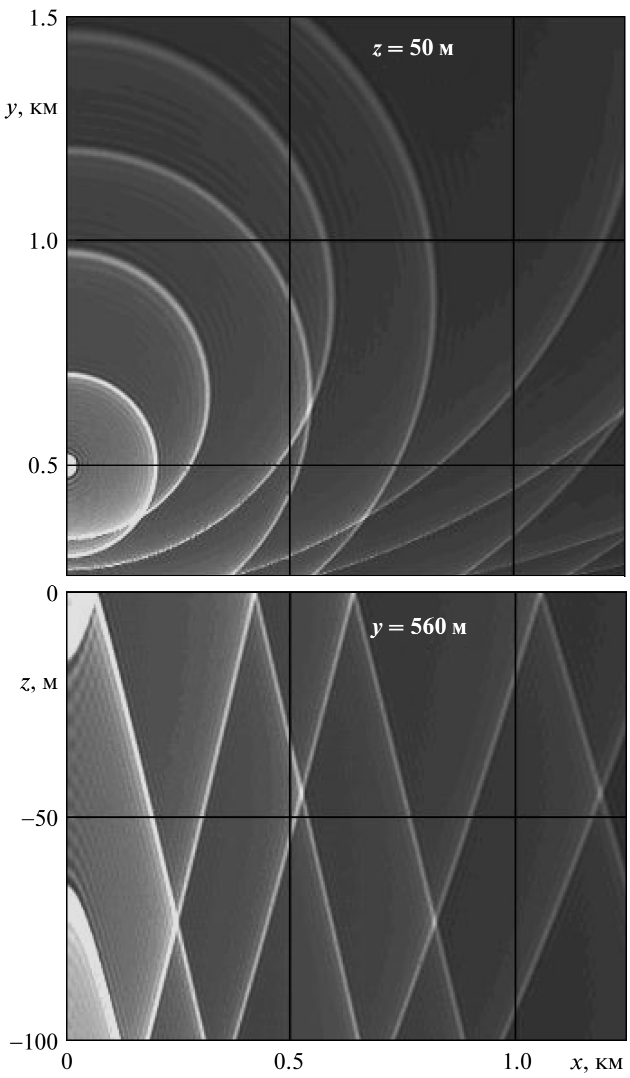
на фиг. 1 изображена теневая картина полного волнового поля (линии уровня, суммирование 50 мод) в плоскости (y, z). Координаты источника $x_0 = 0$, $y_0 = 500$ м, $z_0 = -40$ м. Отчетливо видна лучевая структура построенных решений, в частности, совокупность падающих и отраженных лучей. Кроме того, котангенс угла наклона лучей к вертикали примерно равен 0.44 в полном соответствии с лучевой теорией, согласно которой направление групповой скорости Θ, а следовательно, и направление распространения энергии определяется из равенства [1–3, 12]

$$\text{ctg}^2\Theta = c^2 = \omega^2/(N^2 - \omega^2)^2$$

Сингулярность решения на лучах обусловлена погрешностью использованной модели идеальной среды. Основной вклад в сингулярность дает бесконечное число коротковолновых мод с большими номерами. Для получения полного волнового поля надо учитывать конечное число мод, и это число приближенно определяется характерным масштабом Стокса $D = \sqrt{2\nu_0/N}$, где ν_0 – кинематическая вязкость [2, 3]. Очевидно, что волновые моды с большими номерами, длина волны которых меньше D, вклада в решение не дают.

В верхней части фиг. 2 изображена теневая картина суммы 50 волновых мод в плоскости (x, y). Видна картина отражения линий постоянной фазы $2\pi k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ от линии дна

$$z = -50\ \text{м}, \quad y = -z/\gamma = 250\ \text{м}$$



Фиг. 2

В нижней части фиг. 2 изображена теневая картина суммы 50 волновых мод в плоскости (x, z). Вследствие симметрии волновой картины относительно оси $x = 0$ показана лишь область $x \geq 0$.

Заметим, что все построенные с использованием преобразования Канторовича–Лебедева решения – точные, причем характерные лучевые картины волновых полей внутренних гравитационных волн в клиновидной области стратифицированной среды получены без использования математического аппарата геометрической оптики.

4. Приложение. ВКБ асимптотика гипергеометрической функции. Гипергеометрическая функция $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ удовлетворяет уравнению ([13], формула 9.151), которое можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + a(z)\frac{\partial F}{\partial z} + b(z)F = 0$$
$$a(z) = \frac{\gamma - (\gamma+1)z}{z(1-z)}, \quad b(z) = -\frac{\alpha\beta}{z(1-z)} \tag{4.1}$$

Величины α, β, γ определены в разд. 3, индекс n у значений μ_n опускается, рассматривается область $z > 1$.

Решение уравнения (4.1) будем искать в виде

$$F(z) = R(z)U(z) \tag{4.2}$$

Тогда для определения функции $U(z)$ получаем уравнение, которое при больших значениях μ упрощается:

$$\frac{d^2U}{dz^2} + \mu^2 b_1(z)U = 0; \quad b_1(z) = \frac{1}{4z^2(z-1)} \tag{4.3}$$

ВКБ асимптотика этого уравнения строится стандартным образом ([14], гл.II, § 3, формула 5), из которой получаем

$$U(z) = B\sqrt{2z}\,\sqrt[4]{z-1}\,\exp(\mu\,\mathrm{arctg}\sqrt{z-1})$$

Учитывая выражения (4.2), имеем

$$F(z) = B\sqrt{2}\,(z-1)^{-1/4}\exp\left(-i\mu\ln\frac{z}{2}\right)\exp(\mu\,\mathrm{arctg}\sqrt{z-1})$$

Для нахождения значения нормировочного коэффициента B рассмотрим асимптотику гипергеометрической функции при $z \to \infty$, имеющую вид [13, 15]

$$F(z) = \frac{\Gamma(1+i\mu)\Gamma(1/2)}{(\Gamma(3/4+i\mu))^2}(-z)^{-1/4-i\mu/2} + O\left(z^{-3/4}\right) \tag{4.4}$$

Заменяя гамма-функцию на ее асимптотику при больших значениях параметра μ, представим выражение (4.4) следующим образом:

$$F(z) = 2^{i\mu}\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)\exp\left(\frac{\pi\mu}{2}\right)z^{-1/4}\exp\left(-i\frac{\mu}{2}\ln z\right)$$

откуда находим коэффициент B, и в результате, при $z > 1$ ВКБ асимптотика гипергеометрической функции принимает вид

$$F(z) = 2^{i\mu}\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)(z-1)^{-1/4}\exp\left(-i\frac{\mu}{2}\ln z\right)\exp(\mu\,\mathrm{arctg}\sqrt{z-1})\left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right) \tag{4.5}$$

Аналитически продолжив выражение (4.5) на область $0 \le z < 1$, можно получить

$$F(z) = (1-z)^{-1/4}\exp\left(-i\frac{\mu}{2}\left(\ln\frac{z}{4} + \ln\frac{1+\sqrt{1-z}}{1-\sqrt{1-z}}\right)\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right) \tag{4.6}$$

Асимптотика (4.6) неравномерна при $z \to 1$, так как гипергеометрическая функция при $z \to 1$ ведет себя как $\ln(1-z)$, в то время как асимптотика (4.6) при $z \to 1$ стремится к $\mathrm{const}\,(1-z)^{-1.4}$. Однако при z, не очень близких к единице, она очень хорошо приближает рассматриваемую в разд. 3 гипергеометрическую функцию. Очевидно, что при увеличении μ и соответственно уменьшении z ВКБ асимптотика все более точно описывает поведение гипергеометрической функции.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (14-01-00071, 14-01-00466, 14-08-00701).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pedlosky J.* Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin: Springer, 2010. 260 p.
2. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. М.: Наука, 2010. 469 с.
3. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Wave dynamics of stratified mediums. М.: Наука, 2012. 584 с.
4. *Hsu M.K., Liu A.K., Liu C.* A study of internal waves in the China Seas and Yellow Sea using SAR. // Continental Shelf Research. 2000. V. 20. P. 389–410.
5. *Belov V.V., Dobrokhotov S.Yu., Tudorovskiy T.Ya.* Operator separation of variables for adiabatic problems in quantum and wave mechanics // J. Eng. Mathematics. 2006. V. 55. № 1. P. 183–237.
6. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Far fields of internal gravity waves in stratified media of variable depth // Rus. J. Math. Physics. 2010. V. 17. № 4. P. 400–412.
7. *Yang-Yih Chen, Guan-Yu Chen, Chia-Hao Lin, Chiu-Long Chou.* Progressive waves in real fluids over a rigid permeable bottom. // Coastal Eng. Journal. 2010. V. 52. № 1. P. 17–42.
8. *Grue J., Jensen A.* Orbital velocity and breaking in steep random gravity waves. // J. Geophys. Research. 2012. V. 117. P. C07–C013.
9. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Дальние поля внутренних гравитационных волн в неоднородных и нестационарных стратифицированных средах // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2013. Т. 6. № 2. С. 55–70.
10. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Wave dynamics of stratified mediums with variable depth: exact solutions and asymptotic representations // IUTAM Procedia. 2013. V. 8. P. 229–237.
11. *Dobrokhotov S.Yu., Lozhnikov D.A. , Vargas C.A.* Asymptotics of waves on the shallow water generated by spatially-localized sources and trapped by underwater ridges. // Rus. J. Math. Physics. 2013. V. 20. № 1 . P. 11–24.
12. *Владимиров Ю.В.* Точное решение для стоячих монохроматичесих внутренних волн в клине // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 5. С. 7–792.
13. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 1108 с.
14. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
15. *Watson G.N.* A treatise on the theory of Bessel functions (Reprint of the 2nd ed.). Cambridge: Univ. Press; 1995. 812 p.

Москва
e-mail: internalwave@mail.ru

Поступила в редакции. 13.XI.2013
13.XI.3013