ИЗВЕСТИЯ РАН. ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА, 2011, том 47, № 2, с. 1–4

УДК 532.59

ДАЛЬНИЕ ПОЛЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ОТ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ИСТОЧНИКОВ ВОЗМУЩЕНИЙ

© 2011 г. В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

119526 Москва, проспект Вернадского, д. 101, корп. 1

E-mail: bulatov@index-xx.ru

Поступила в редакцию 10.03.2010 г., после доработки 27.04.2010 г.

Рассмотрена задача о дальнем поле внутренних гравитационных волн, генерируемых источником, осциллирующим по вертикали. Показано, что в фиксированную точку наблюдения приходит основной волновой фронт отдельной моды, а затем приходят два фронта дополнительного поля этой волновой моды, обусловленного осцилляциями источника, при этом асимптотики вблизи дополнительных волновых фронтов выражаются через функцию Эйри.

Ключевые слова: внутренние гравитационные волны, стратифицированная среда, осциллирующий источник.

Детальное описание широкого круга физических явлений, связанных с динамикой природных стратифицированных неоднородных по горизонтали и нестационарных сред, приводит к необходимости исследования достаточно развитых математических моделей, которые, как правило, оказываются весьма сложными, нелинейными, многопараметрическими, и для их полного исследования эффективны лишь численные методы. Однако в ряде случаев первоначальное представление об изучаемом круге явлений можно получить на основе более простых асимптотических моделей и аналитических методов их исследования, и в этом отношении весьма характерны задачи динамики внутренних гравитационных волн [1–4].

Для исследования всех волновых эффектов обычно бывает достаточно построить относительно простые модели, доступные для теоретического исследования, на основе которых возможно детальное изучение и классификация процессов взаимодействия волн в стратифицированных средах. Однако, несмотря на простоту используемых модельных предположений, удачный выбор формы решения позволяет получить нетривиальные физически интересные результаты. В этой связи необходимо отметить задачу об эволюции негармонических волновых пакетов в плавно-неоднородной по горизонтали и нестационарной стратифицированной среде [1, 2].

Построенные модельные решения, или анзацы (Anzatz (нем.) – вид решения), описывающие структуру полей вблизи волновых фронтов отдельных мод в вертикально стратифицированной среде, позволяют в дальнейшем описать асимптотические представления полей внутренних волн с учетом реальной изменчивости океана. Кроме того, оказалось, что построенные асимптотические решения вполне согласуемы с результатами натурных наблюдений внутренних волн в океане [5, 6].

Поэтому представляет интерес получение решений, описывающих дальние поля внутренних волн от осциллирующих источников возмущений, которые в дальнейшем будут основой для построения соответствующих асимптотических анзацев. Явное выделение эффектов, определяемых колебаниями источника возмущений в стратифицированных потоках, позволит в дальнейшем получить решения, описывающие волновую динамику внутренних гравитационных волн в реальных природных стратифицированных средах. Дальнее волновое поле в случае резонанса и в двумерном приближении рассмотрено в [7], численно волновые поля от произвольно движущихся, в том числе осциллирующих источников возмущений исследовались в [1, 2].

В настоящей работе рассматривается источник возмущений, который движется равномерно вдоль некоторой оси в слое произвольно стратифицированной среды $-H < z < 0$ и совершает периодические колебания с частотой ω_0 по вертикали. Далее будут исследоваться характеристики дальнего поля внутренних гравитационных волн в этом случае и их связь со случаем равномерного и прямолинейного движения источника. Будем считать, что точечный источник возмущений, движущийся по горизонтали со скоростью V, включается при $t = 0$, тогда

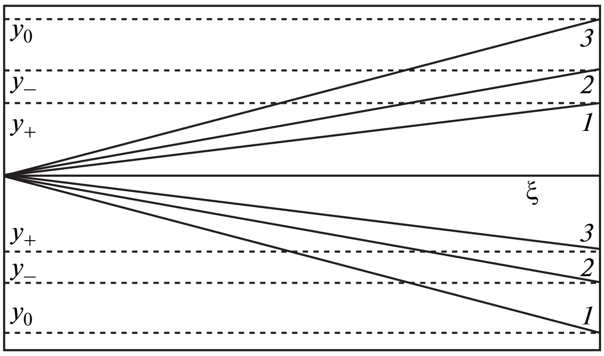

Рис. 1. Волновые фронты первой моды от движущегося осциллирующего источника возмущений: линия *1* – волновой фронт основного поля U_1^0, линия *2, 3* – волновые фронты дополнительных полей U_1^+, U_1^- соответственно.

волновое поле G, возбуждаемое этим осциллирующим источником, удовлетворяет уравнению [1–4]

$$LG = \delta'(x+Vt)\delta(y)\,\delta(z-z_0-A\cos\omega_0 t)\Theta(t),$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+N^2(z)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

$$G = 0,\quad z = 0,\ -H,$$

где $N^2(z)$ – частота Вяйсяля–Брента, $\Theta(t) = 0$ при $t < 0$, $\Theta(t) = 1$, при $t > 0$,, L – оператор внутренних гравитационных волн в приближении Буссинеска, z_0 – средняя глубина источника возмущений, A – амплитуда его осцилляций. Будем искать предел функции G при фиксированных $\xi = x + Vt$ и $t\to\infty$. Пусть Γ – функция, определяемая из задачи: $L\Gamma(x,y,z,z_0,t) = \delta'(x)\delta(y)\delta(z-z_0)\delta(t)$, $\Gamma\equiv 0$ $(t<0)$, $\Gamma = 0$, $z = 0, -H$. Тогда $G = \int_0^t \Gamma\left(x+V\tau, y, z, z_0 + A\cos\omega_0\tau, t-\tau\right)d\tau$. Функция Γ разлагается в сумму мод: $\Gamma = \sum\Gamma_n$, где

$$\Gamma_n = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\mu x+\lambda y)\sin\left(\omega_n(k)t\right)\,\mu\omega_n(k)\varphi_n(z,k)\varphi_n(z_0,k)}{8\pi^2k^2}d\mu d\lambda,$$

здесь $k = \sqrt{\lambda^2+\mu^2}$, $\omega_n(k)$ – дисперсионная кривая n-й моды, $\varphi_n(z,k)$ – соответствующая собственная функция основной вертикальной спектральной задачи внутренних волн [1–4]:

$$\frac{\partial^2\varphi_n(z,k)}{\partial z^2}+k^2\left(\frac{N^2(z)}{\omega_n^2(k)}-1\right)\varphi_n(z,k) = 0,$$

$$\varphi_n = 0,\quad z = 0,\ -H.$$

Функция G также представима в виде суммы волновых мод G_n, где

$$G_n = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\frac{\Phi_n\mu\omega_n(k)\varphi_n(z,k)\varphi_n(z_0+A\cos\omega_0\tau,k)}{8\pi^2k^2}\,d\tau d\mu d\lambda,\tag{1}$$

$$\Phi_n = \cos\left(\mu(x+V\tau)+\lambda y\right)\,\sin\left(\omega_n(t-\tau)\right).$$

Разложим функцию $\varphi_n(z_0 + A\cos\omega_0\tau, k)$ в ряд Фурье по τ: $\varphi_n(z_0 + A\cos\omega_0\tau, k) = \Psi_0(z_0,k) + A\Psi_1(z_0,k)\cos\omega_0\tau + \ldots$ [1–3]. Подставляя первый член этого разложения в (1), получим, что каждая волновая мода состоит из основного поля G_n^0, возникающего при равномерном движении источника возмущений, и поля G_n^1, обусловленного осцилляциями этого источника. Поскольку, как правило, в океане реально возбуждаются несколько низших волновых мод, то можно считать, что $\varphi_n(z,k)$ – медленно меняющаяся функция по переменной z [1, 2, 4, 5], поэтому в (1) положим: $\Psi_0(z_0,k)\approx\varphi_n(z_0,k)$, $\Psi_1(z_0,k)\approx\dfrac{\partial\varphi_n(z_0,k)}{\partial z_0}$. Тогда получим

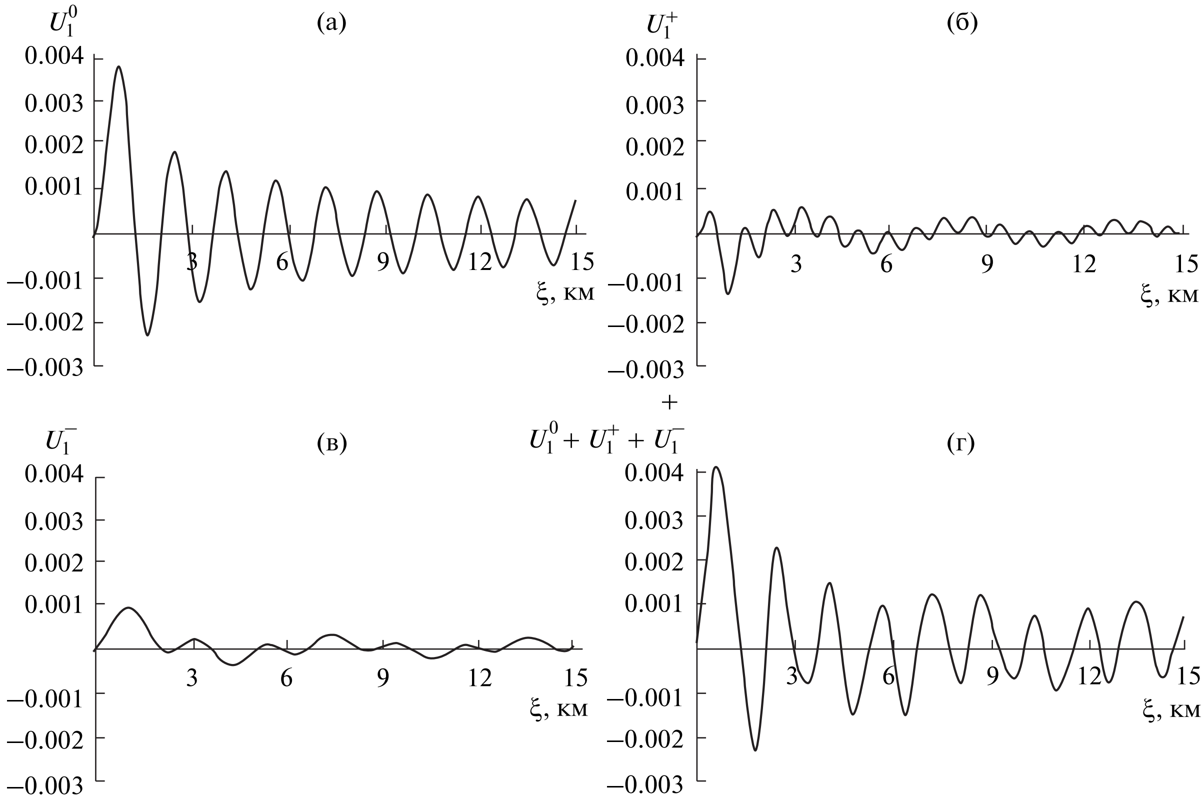

Рис. 2. Первая мода дальнего поля внутренних гравитационных волн от движущегося осциллирующего источника возмущений: *1* – функция U_1^0, *2* – функция U_1^+, *3* – функция U_1^-, *4* – сумма $U_1^0 + U_1^+ + U_1^-$.

$$G_n^1 = A\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t \frac{\Phi_n\mu\omega_n(k)\varphi_n(z,k)\cos\omega_0\tau}{8\pi^2k^2}\frac{\partial\varphi_n(z_0,k)}{\partial z_0}d\tau d\lambda d\mu.$$

Проводя интегрирование по переменной τ, имеем

$$G_n^1 = A\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\Omega_n^+ + \Omega_n^-)\cos(\mu x + \nu y)\omega_n(k)\varphi_n(z,k)\mu}{8\pi^2k^2}\frac{\partial\varphi_n(z_0,k)}{\partial z_0}d\lambda d\mu,$$

$$\Omega_n^{\pm} = \frac{\sin(\mu Vt \mp \omega_0 t) + \sin(\omega_n t)}{\mu V - \omega_n \pm \omega_0}.$$

Сместим контур интегрирования по μ в верхнюю полуплоскость, тогда при фиксированных $\xi = x + Vt$ и $t \to \infty$ можно получить

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ \xi = x+Vt = \mathrm{const}}} G_n^1 =$$

$$= A\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon}\frac{(Q_n^+ + Q_n^-)\mu\omega_n(k)\varphi_n(z,k)}{4\pi^2k^2}\frac{\partial\varphi_n(z_0,k)}{\partial z_0}d\lambda d\mu,$$

$$Q_n^{\pm} = \frac{\sin(\mu\xi + \nu y \mp \omega_0 t)}{\mu V - \omega_n \pm \omega_0}.$$

При $\xi < 0$ этот интеграл экспоненциально мал, при $\xi > 0$ надо перевести интегрирование в нижнюю полуплоскость [1, 2]. В результате получим

$$G_n^1 = G_n^+ + G_n^-, \qquad (2)$$

$$G_n^{\pm} = A\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\mp i\omega_0 t - \mu_{n\pm}\xi - \lambda y)}{2\pi(V - c_n\mu_{n\pm}/k)}D_n^{\pm}(z,k)d\lambda,$$

$$D_n^{\pm}(z,k) = \frac{\mu_{n\pm}\omega_n(k)\varphi_n(z,k)}{k^2}\frac{\partial\varphi_n(z_0,k)}{\partial z_0},$$

где $\mu_{n\pm} = \mu_{n\pm}(\lambda)$ – решения соответствующих уравнений: $\mu_{n\pm}V = \omega_n(k) \pm \omega_0$, $k = \sqrt{\lambda^2 + \mu_{n\pm}^2}$, $c_n = \partial\omega_n/\partial k$. Интегралы (2) при больших y, ξ можно вычислить асимптотически, если известны свойства функций $\mu_{n\pm}(\lambda)$ [1, 2, 8]. Максимум $\partial\mu_{n\pm}/\partial\lambda$ определяет положение волновых фронтов вдали от колеблющегося источника возмущений, и поле вблизи них можно выразить через функцию Эйри [8]. Дополнительное поле G_n^1, возникающее вследствие осцилляций источника возмущений, необходимо сравнить с основным полем G_n^0, имеющим вид

$$G_n^0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\mu_{n0}\xi - \lambda y)}{2\pi(V - c_n\mu_{n0}/k)} B_n(z,k)d\lambda, \tag{3}$$

где $\mu_{n0} = \mu_{n0}(\lambda)$ — решение уравнения: $\mu_{n0}V = \omega_n(k)$, $k = \sqrt{\lambda^2 + \mu_{n0}^2}$, $D_n^{\pm}(z, k/B_n(z,k)) = A\dfrac{\partial\varphi_n(z_0,k)}{\partial z}\Big/\varphi_n(z_0,k)$. Функции $\partial\mu_{n0,\pm}/\partial\lambda$ достигает максимума в точке λ_0 и $\mu_{n0,\pm} = \mu_{n0,\pm}(\lambda_0)$,, и функция $\mu_{n0,\pm}(\lambda)$ вблизи этой точки λ_0 разлагается в ряд по нечетным степеням $\lambda - \lambda_0$: $\mu_{n0,\pm}(\lambda) = \mu_{n0,\pm} + q_{n0,\pm}(\lambda - \lambda_0) - -b_{n0,\pm}(\lambda - \lambda_0)^3 + \ldots$ [1, 2]. Очевидно, что положение волновых фронтов отдельных мод определяется как: $y = \xi q_{n0,\pm}$. Тогда, используя разложения функций $\mu_{n0\pm}(\lambda)$ вблизи точки λ_0, можно определить асимптотики $U_n^0, U_n^{\pm}$ интегралов (2), (3) вблизи волновых фронтов вдали от источников возмущений отдельных мод, которые имеют вид [1, 2, 8]

$$U_n^{0,\pm} \approx \frac{\cos(M^{0,\pm}\omega_0 t + \mu_{n0,\pm}\xi)}{V - c_n(k_0)\dfrac{\mu_{n0,\pm}}{k_0}} \frac{R_n^{0,\pm}}{\sqrt[3]{3b_{n0,\pm}\xi}} \times \tag{4}$$
$$\times Ai\left(\frac{\xi q_{n0,\pm} - y}{\sqrt[3]{3b_{n0,\pm}\xi}}\right)\frac{\mu_{n0,\pm}\omega_n(k_0)}{k_0^2}\varphi_n(z,k_0)\frac{\partial\varphi_n(z_0,k_0)}{\partial z_0},$$

где $M^0 = 0$, $M^{\pm} = \pm 1$, $k_0 = \sqrt{\mu_{n0,\pm}^2 + \lambda_0^2}$, $Ai(x)$ — функция Эйри [8], $R_n^{0,\pm}$ — соответствующие амплитудные множители. Для численных оценок использовалось типичное, отличное от постоянного, распределение $N(z)$, взятое из [5]. Значения остальных параметров: $\omega_0 = 2\pi/T$, $T = 10$ мин, $V = 4$ м/с, $A = 1$ м. Для этих значений параметров проводилось сравнение асимптотик полей U_n^0 и $U_n^{\pm}$ для первой волновой моды.

Схематическое положение волновых фронтов изображено на рис. 1, результаты расчетов волнового поля первой моды по формулам (4) при $y = 100$ м приведены на рис. 2. Таким образом, качественная картина дальнего поля внутренних гравитационных волн от движущегося осциллирующего источника возмущений выглядит следующим образом. Вначале в фиксированную точку наблюдения приходит волновой фронт отдельной моды основного поля, а затем приходят два фронта, один за другим, дополнительного поля этой волновой моды, обусловленного осцилляциями источника. При этом, амплитуда волнового поля вблизи дополнительных волновых фронтов, как правило, не превышает 10% от амплитуды основного волнового поля. Полученная волновая картина качественно совпадает с результатами точного численного решения данной задачи [1, 2], что позволяет в дальнейшем использовать полученные асимптотические представления решения для нахождения дальних волновых полей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Внутренние гравитационные волны в неоднородных средах. М.: Наука, 2005. 195 с.
2. *Bulatov V.V., Vladimirov Y.V.* Internal gravity waves: theory and applications. M.: Наука, 2007. 304 с.
3. *Габов С.А.* Новые задачи математической теории волн. М.: Наука, 1998. 448 с.
4. *Miropol'skii Yu.Z., Shishkina O.V.* Dynamics of internal gravity waves in the ocean. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. 346 p.
5. *Morozov E.G.* Internal tides. Global field of internal tides and mixing caused by internal tides. Waves in geophysical fluids. Wein - New York: Springer, 2006. 286 p.
6. *Булатов В.В., Ваньян П.Л., Владимиров Ю.В. и др.* Распространение внутренних приливных волн в северо-западной части Тихого океана // Известия Академии инженерных наук РФ. Прикладная математика и информатика. 2000. Т. 1. С. 112–117.
7. *Боровиков В.А.* Дальнее поле движущегося осциллирующего источника в случае резонанса // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. № 2. С. 243–256.
8. *Borovikov V.A.* Uniform stationary phase method. U.K. London: IEE electromagnetic waves. Series 40. 1994. 233 p.