УДК 532.59

# ВНУТРЕННИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ ПРИ КРИТИЧЕСКИХ РЕЖИМАХ ГЕНЕРАЦИИ И В ОКРЕСТНОСТИ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ ВОЗМУЩЕНИЙ

В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров

Институт проблем механики РАН, 119526 Москва
E-mail: bulatov@index-xx.ru

Рассмотрено поле внутренних гравитационных волн в слое произвольно стратифицированной жидкости при критических режимах генерации и в окрестности траекторий движения источников возмущений. Исследованы точные решения, описывающие структуру отдельной моды волнового поля в окрестности источника возмущений при критических режимах генерации, и получены выражения для полного поля, представляющего собой сумму всех волновых мод. В окрестности траекторий движения источников возмущений построены асимптотические представления собственных функций и собственных значений основной вертикальной спектральной задачи внутренних волн в приближении больших волновых чисел и получены асимптотические выражения для отдельной моды волнового поля, описывающие пространственную структуру и особенности полей внутренних гравитационных волн.

Ключевые слова: внутренние гравитационные волны, стратифицированная среда, асимптотика отдельной моды, групповая скорость.

**Введение.** В настоящее время в связи с необходимостью решения проблем геофизики, океанологии, физики атмосферы, охраны и изучения окружающей среды, использования в технике криогенных жидкостей, эксплуатации сложных гидротехнических сооружений, в том числе морских нефтедобывающих комплексов, и ряда других актуальных задач науки и техники возрос интерес к изучению динамики волновых движений различных неоднородных, в частности стратифицированных, жидкостей [1–7]. Как правило, эти задачи исследуются с помощью асимптотических методов. На основе невозмущенных уравнений гидродинамики формируются асимптотические разложения, или анзацы (Anzatz (нем.) — вид решения), позволяющие в дальнейшем решать задачи для возмущенных уравнений, которые могут учитывать эффекты нелинейности, неоднородности и нестационарности природных стратифицированных сред.

Одним из механизмов генерации внутренних гравитационных волн в океане может являться возбуждение волновых полей при движении (обтекании) твердых тел, пятен турбулентности, водных линз и других неволновых образований с аномальными характеристиками и иными нелокальными источниками возмущений волновых полей [1–3]. Как правило, в такой постановке рассматривается линейная задача об установившемся поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемом при движении нелокального источника возмущений в слое стратифицированной жидкости толщиной $H$ с произвольным распределением по глубине частоты Брента — Вяйсяля $N^2(z) = -gd\ln\rho/dz$ ($g$ — ускорение свободного падения; $\rho$ — плотность стратифицированной среды). При этом получаемые решения в виде многократных квадратур даже в рамках линейных моделей своеобразны и определяют нетривиальные физические следствия [1, 2, 8–10].

Следует отметить, что для детального описания широкого круга физических явлений, обусловленных динамикой стратифицированных неоднородных по горизонтали и нестационарных сред, необходимо использовать развитые математические модели, которые, как правило, являются весьма сложными, нелинейными, многопараметрическими и полное исследование которых возможно лишь с помощью численных методов. Однако в ряде случаев первоначальное качественное представление о рассматриваемых явлениях можно получить на основе более простых асимптотических моделей и аналитических методов их исследования [1–3]. Поэтому для изучения всех волновых эффектов, как правило, достаточно построить относительно простые модели, доступные для теоретического исследования. В дальнейшем эти модели входят в набор "блоков", из которых складывается общая картина динамики волн, позволяющая проследить соотношение различных волновых явлений и установить их взаимосвязь. Однако в некоторых случаях, несмотря на простоту используемых модельных предположений, удачный выбор формы решения позволяет получить физически содержательные результаты. В связи с этим необходимо отметить задачу об эволюции негармонических волновых пакетов в плавно-неоднородной по горизонтали и нестационарной стратифицированной среде [1, 2]. Построенные модельные решения, описывающие структуру полей вблизи волновых фронтов отдельных мод в вертикально стратифицированной среде, позволяют получить асимптотические представления полей внутренних волн с учетом изменчивости среды не только по вертикали и горизонтали, но и по времени. Кроме того, построенные решения хорошо согласуются с результатами натурных наблюдений волновых полей [11].

Исходя из сказанного выше представляет интерес исследовать ранее не рассматривавшиеся точные решения, описывающие ближнее поле внутренних гравитационных волн при критических режимах генерации, и асимптотические решения для дальних волновых полей в окрестности траекторий движения источников возмущений.

**1. Ближнее поле критических режимов генерации.** Рассмотрим возвышение $\eta$ внутренних гравитационных волн, возбуждаемых точечным источником массы единичной интенсивности, который начинает двигаться в момент времени $t = 0$ в слое стратифицированной жидкости $(-H < z < 0)$. Это возвышение определяется из задачи [1, 2]

$$L\eta = \theta(t)\,\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial z_0}\,(\delta(x - x_0(t))\delta(y - y_0(t))\delta(z - z_0(t)), \tag{1.1}$$

где

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big) + N^2(z)\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big),$$

$N(z)$ — частота Брента — Вяйсяля; $\theta(t) = 0$ при $t < 0$, $\theta(t) = 1$ при $t > 0$; $(x_0(t), y_0(t), z_0(t))$ — траектория движения источника. В качестве граничных условий используется приближение "жесткой крышки":

$$\eta = 0, \qquad z = 0, -H. \tag{1.2}$$

Решение (1.1), (1.2) имеет вид [1, 2]

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n,$$

$$\eta_n = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\int_0^{\infty} \frac{\omega_n^2(k)}{k}\,\varphi_n(z,k)\int_0^t \frac{\partial \varphi_n(z_0(\tau),k)}{\partial z_0(\tau)}\,\exp(i\omega_n(k)(t-\tau))J_0(kr(\tau))\,d\tau\,dk,$$

$$r(\tau) = [(x - x_0(\tau))^2 + (y - y_0(\tau))^2]^{1/2},$$

где $J_0$ — функция Бесселя нулевого порядка; $\omega_n(k)$, $\varphi_n(z,k)$ — собственные числа и собственные функции основной спектральной вертикальной задачи внутренних волн:

$$\frac{\partial^2\varphi_n(z,k)}{\partial z^2}+k^2\Big(\frac{N^2(z)}{\omega_n^2(k)}-1\Big)\varphi_n(z,k)=0, \qquad \varphi_n=0, \quad z=0,-H.$$

В случае установившегося режима и прямолинейного равномерного движения точечного источника возмущений со скоростью $V$ на постоянной глубине ($z_0=\mathrm{const}$, $y_0=0$, $x_0=-V\tau$) отдельная мода возвышения $\eta_n$ в движущейся вместе с источником системе координат ($x+Vt\equiv\lambda$) имеет вид [1, 2]

$$\eta_n(\lambda,y)=\frac{1}{2\pi V}\int\limits_0^\infty\frac{\omega_n^2(k)}{k}\,\varphi_n(z,k)\,\frac{\partial\varphi_n(z_0,k)}{\partial z_0}\int\limits_{-\infty}^{\lambda}\cos\Big(\frac{\omega_n(k)(\lambda-\xi)}{V}\Big)J_0\big(k\sqrt{y^2+\xi^2}\,\big)\,d\xi\,dk. \tag{1.3}$$

При малых значениях $\lambda$, $y$, т. е. в окрестности движущегося источника возмущений, отдельную моду возвышения $\eta_n(\lambda,y)$ можно представить в виде

$$\begin{gathered}\eta_n(\lambda,y)=\eta_n(0,0)+T_n\lambda+B_ny+\ldots,\\ T_n=\frac{\partial\eta_n}{\partial\lambda}(0,0), \qquad B_n=\frac{\partial\eta_n}{\partial y}(0,0).\end{gathered} \tag{1.4}$$

Очевидно, что в силу симметричности рассматриваемой задачи по переменной $y$ функция $\eta_n(\lambda,y)$ является четной по данной переменной и соответственно $B_n=0$.

Рассмотрим поведение функции $\eta_n(0,0)$. Внутренний интеграл в (1.3) берется в виде [12, 13]

$$R_n\equiv\int\limits_0^\infty\cos\Big(\frac{\omega_n(k)\xi}{V}\Big)J_0(k\xi)\,d\xi=\frac{1}{\mu_n^+(k)}, \quad k>\frac{\omega_n(k)}{V}, \qquad R_n=0, \quad k<\frac{\omega_n(k)}{V},$$

$$\mu_n^\pm(k)=\sqrt{\pm k^2\mp\omega_n^2(k)/V^2}.$$

Тогда

$$\eta_n(0,0)=\int\limits_{d_n}^\infty\frac{\omega_n^2(k)}{k\mu_n^+(k)}\,F_n(k,z,z_0)\,dk,$$

где

$$F_n(k,z,z_0)=\frac{1}{2\pi V}\,\varphi_n(z,k)\,\frac{\partial\varphi_n(z_0,k)}{\partial z_0},$$

$d_n$ — корень уравнения $k^2V^2=\omega_n^2(k)$ при $V<c_n$ и $d_n=0$ при $V>c_n$; $c_n=d\omega_n(k)/dk$ ($k=0$) — максимальная групповая скорость $n$-й моды.

Рассмотрим случай экспоненциально стратифицированной жидкости ($N(z)=\mathrm{const}$):

$$F_n(k,z,z_0)=\frac{\pi}{VN^2H^2}\sin\Big(\frac{\pi nz}{H}\Big)\cos\Big(\frac{\pi nz_0}{H}\Big)\equiv A_n(z,z_0).$$

Пусть $\varepsilon_n^\pm\equiv b_n\sqrt{\pm1\mp c_n^2/V^2}$ — мера отклонения скорости источника $V$ от величин $c_n=NH/(\pi n)$, $b_n=\pi n/H$.

В случае сверхкритического режима ($V > c_n$) выражение для функции $\eta_n(0,0)$ имеет вид

$$\eta_n(0,0) = A_n(z,z_0)\int\limits_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k^2+b_n^2}\,\sqrt{k^2+(\varepsilon_n^+)^2}} = \frac{A_n(z,z_0)}{b_n}\,K\Big(\frac{\sqrt{b_n^2-(\varepsilon_n^+)^2}}{b_n}\Big) =$$

$$= \frac{1}{\pi N^2 HV}\,K\Big(\frac{c_n}{V}\Big)\sin\Big(\frac{\pi n z}{H}\Big)\cos\Big(\frac{\pi n z_0}{H}\Big),$$

в случае докритического режима ($V < c_n$) —

$$\eta_n(0,0) = A_n(z,z_0)\int\limits_{\varepsilon_n}^\infty \frac{dk}{\sqrt{k^2+b_n^2}\,\sqrt{k^2-(\varepsilon_n^-)^2}} = \frac{A_n(z,z_0)}{\sqrt{b_n^2+(\varepsilon_n^-)^2}}\,K\Big(\frac{b_n}{\sqrt{b_n^2+(\varepsilon_n^-)^2}}\Big) =$$

$$= \frac{1}{\pi N^2 H c_n}\,K\Big(\frac{V}{c_n}\Big)\sin\Big(\frac{\pi n z}{H}\Big)\cos\Big(\frac{\pi n z_0}{H}\Big).$$

Здесь $K(x)$ — полный эллиптический интеграл первого рода [12, 13]:

$$K(x) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\tau}{\sqrt{1-x^2\sin^2\tau}}.$$

Вычислим коэффициент $T_n$ в (1.4), который в силу определения с точностью до $V$ является значением отдельной моды $W_n$ вертикальной скорости при $\lambda = y = 0$:

$$\frac{\partial\eta_n}{\partial\lambda} = \frac{1}{V}\,\frac{\partial\eta_n}{\partial t} = \frac{1}{V}\,W_n, \qquad T_n = \frac{W_n(0,0)}{V},$$

$$\frac{\partial\eta_n(0,0)}{\partial\lambda} = \frac{1}{2\pi V}\int\limits_0^\infty \frac{\omega_n^2(k)}{k}\,\varphi_n(z,k)\,\frac{\partial\varphi_n(z_0,k)}{\partial z_0}\,J_0\big(k\sqrt{y^2+\lambda^2}\,\big)\,dk -$$

$$-\frac{1}{2\pi V}\int\limits_0^\infty \frac{\omega_n^2(k)}{k}\,\varphi_n(z,k)\,\frac{\partial\varphi_n(z_0,k)}{\partial z_0}\int\limits_{-\infty}^{\lambda} \frac{\omega_n(k)}{V}\,\sin\Big(\frac{\omega_n(k)(\lambda-\xi)}{V}\Big)J_0\big(k\sqrt{y^2+\xi^2}\,\big)\,d\xi\,dk \equiv$$

$$\equiv P_{1n} - P_{2n}.$$

Слагаемое $P_{1n}$ представим в виде

$$P_{1n}(\lambda,y) = \frac{1}{2\pi V}\int\limits_0^\infty \frac{kN^2}{k^2+b_n^2}\,\varphi_n(z,k)\,\frac{\partial\varphi_n(z_0,k)}{\partial z_0}\,J_0\big(k\sqrt{y^2+\lambda^2}\,\big)\,dk =$$

$$= \frac{n}{H^2 V}\sin\Big(\frac{\pi n z}{H}\Big)\cos\Big(\frac{\pi n z_0}{H}\Big)K_0\Big(\frac{\pi n}{H}\,\sqrt{y^2+\lambda^2}\,\Big),$$

где $K_0(x)$ — функция Макдональда нулевого порядка [12, 13].

Просуммировав ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_{1n}$, получаем выражение

$$P_1(\lambda, y) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} P_{1n}(\lambda, y) = \frac{1}{4\pi V}\Big[\frac{z_-}{(r^2+z_-^2)^{3/2}} + \frac{z_+}{(r^2+z_+^2)^{3/2}} - \\ - \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{2mH - z_-}{(r^2+(2mH-z_-)^2)^{3/2}} - \frac{2mH + z_-}{(r^2+(2mH+z_-)^2)^{3/2}} + \\ + \frac{2mH - z_+}{(r^2+(2mH-z_+)^2)^{3/2}} - \frac{2mH + z_+}{(r^2+(2mH+z_+)^2)^{3/2}}\Big)\Big]$$

($r = \sqrt{\lambda^2+y^2}$; $z_- = z - z_0$; $z_+ = z + z_0$), которое можно интерпретировать следующим образом. Результирующее поле является суммой полей переотраженных источников (относительно границ $z = mH$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), находящихся в точках $z_m^{\pm} = \pm(z_0 + 2mH)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, причем поле каждого источника выражается через производную по $z_0$ от фундаментального решения трехмерного уравнения Лапласа в свободном пространстве.

При $r = 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_{1n}$ также суммируется и выражается через производную $\Psi'(x)$ ($\Psi(x) = \ln\Gamma(x)'$ — пси-функция, или производная гамма-функции [12, 13]):

$$P_1(0,0) = \frac{1}{16\pi H^2 V}\Big(\Psi'\Big(-\frac{z_-}{2H}\Big) + \Psi'\Big(-\frac{z_+}{2H}\Big) - \Psi'\Big(\frac{z_-}{2H}\Big) - \Psi'\Big(\frac{z_+}{2H}\Big) + \frac{4H^2}{z_-^2} + \frac{4H^2}{z_+^2}\Big).$$

Теперь рассмотрим слагаемое $P_{2n}(0,0)$:

$$P_{2n}(0,0) = \frac{nN}{H^2V^2}\sin\Big(\frac{\pi n z}{H}\Big)\cos\Big(\frac{\pi n z_0}{H}\Big)\int_0^{\infty}\frac{k^2}{(k^2+b_n^2)^{3/2}}\int_0^{\infty}\sin\Big(\frac{\omega_n(k)\xi}{V}\Big)J_0(k\xi)\,dk\,d\xi. \tag{1.5}$$

Внутренний интеграл в (1.5) берется в виде

$$Q_n \equiv \int_0^{\infty}\sin\Big(\frac{\omega_n(k)\xi}{V}\Big)J_0(k\xi)\,d\xi = \frac{1}{\mu_n^-(k)}, \quad \frac{\omega_n(k)}{V} > k, \qquad Q_n = 0, \quad \frac{\omega_n(k)}{V} < k.$$

Далее получаем

$$P_{2n}(0,0) = \frac{nN}{H^2V^2}\sin\Big(\frac{\pi n z}{H}\Big)\cos\Big(\frac{\pi n z_0}{H}\Big)\int_0^{\varepsilon_n^-}\frac{k\,dk}{(k^2+b_n^2)\sqrt{(\varepsilon_n^-)^2-k^2}}.$$

В результате имеем

$$P_{2n}(0,0) = \frac{nN}{H^2V^2}\sin\Big(\frac{\pi n z}{H}\Big)\cos\Big(\frac{\pi n z_0}{H}\Big)\ln\Big(\frac{c_n}{V} + \sqrt{\frac{c_n^2}{V^2} - 1}\Big).$$

Следует отметить, что в силу свойств интегралов $Q_n$ и уменьшения значений максимальных групповых скоростей $c_1 > c_2 > c_3 > \ldots$ с уменьшением номера моды ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_{2n}(0,0)$ имеет конечное число отличных от нуля слагаемых.

Таким образом, полученные асимптотические и точные представления для отдельной моды и полного поля позволяют описывать критические режимы генерации внутренних гравитационных волн вблизи источников возмущений, движущихся с произвольными скоростями.

**2. Волновые поля вблизи траекторий движения источников возмущений.** Для удобства и в силу линейности задачи (1.1) исследуем решение $G$ этой задачи ($\partial G/\partial z_0 = \eta$), которое при $t \to \infty$ и фиксированных $\xi = x + Vt$ имеет вид [1, 2]

$$G(\xi, y, z, z_0) = \sum_n G_n = \sum_n (J_n^+ + J_n^-),$$

где

$$J_n^{\pm} = \mathrm{Re}\,\frac{V}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\omega_n^2(k)\varphi_n(z,k)\varphi_n(z_0,k)\exp\left(i(\pm\mu_n(\nu)\xi - \nu y)\right)}{k^2(V^2 - \omega_n(k)\omega_n'(k)/k)}\,d\nu,$$
$$k(\nu) = \sqrt{\mu_n^2(\nu) + \nu^2}, \qquad \mu_n(k(\nu)) = \omega_n(k(\nu))/V. \tag{2.1}$$

В (2.1) целесообразно перейти к переменной интегрирования $k$:

$$J_n^{\pm} = \mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi V}\int\limits_0^{\infty}\frac{\omega_n^2(k)\varphi_n(z,k)\varphi_n(z_0,k)\exp\left(i(\pm\omega_n(k)\xi/V - \nu_n(k)y)\right)}{k\nu_n(k)}\,dk, \tag{2.2}$$

$$\nu_n(k) = \sqrt{k^2 - \omega_n^2(k)/V^2}.$$

Рассмотрим поле внутренних гравитационных волн при $\xi \to \infty$ и ограниченных (или сколь угодно малых) $y$, т. е. в окрестности траекторий движения источников возмущений. В этом случае для исследования поведения решения $G(\xi, y, z, z_0)$ необходимо учитывать интегралы $J_n^+$, $J_n^-$, а также то, что для расчета волнового поля обычный метод стационарной фазы неприменим, так как стационарные точки в (2.2) стремятся к бесконечности. Кроме того, при $k \to \infty$ функции $\varphi_n(z,k)$ нельзя считать медленно меняющимися функциями переменной $k$, при больших $k$ эти функции сосредотачиваются в окрестности значения $z^*$, дающего максимум $N(z)$, а при удалении от значения $z^*$ функции $\varphi_n(z,k)$ быстро убывают [1, 8]. Эти свойства собственных функций позволяют свести (2.2) к известным эталонным интегралам.

Поскольку при $k \to \infty$ функции $\varphi_n(z,k)$ сосредотачиваются в окрестности максимума $N(z)$ и быстро убывают вне этой окрестности, при больших $k$ реальное распределение $N(z)$ с четко выраженным термоклином можно заменить на модельное с квадратичной функцией распределения $N(z)$, а граничное условие при $z = 0, H$ — на условия экспоненциального убывания $\varphi_n(z,k)$ при удалении от точки максимума, т. е. $\varphi_n(+\infty,k) = \varphi_n(-\infty,k) = 0$.

Далее рассмотрим модельное распределение частоты плавучести $N^2(z)$, аппроксимирующее характерную для океана стратификацию с одним максимумом термоклина [1–3]:

$$N^2(z) = N_0^2 - 4\chi^2(z - z^*)^2. \tag{2.3}$$

Здесь $z = z^*$ — точка максимума $N^2(z)$. Далее для упрощения преобразований будем полагать $z^* = 0$.

Для того чтобы найти собственные функции $\varphi_n(z,k)$ и дисперсионные кривые $\omega_n(k)$ в случае стратификации (2.3), соответствующую краевую задачу запишем в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\varphi_n(z,k)}{\partial z^2}+\frac{k^2}{\omega_n^2(k)}\,(N_0^2-4\chi^2z^2-\omega_n^2(k))\varphi_n(z,k)=0,\\ \varphi_n(+\infty,k)=\varphi_n(-\infty,k)=0.\end{gathered}\tag{2.4}$$

Выполнив замену $z=\alpha_n x$ (коэффициент $\alpha_n$ подлежит определению), получаем

$$\varphi_n(z)=\varphi_n(\alpha_n x)=\psi(x).$$

Тогда выражение (2.4) принимает вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\psi_n(x)}{\partial x^2}+\Big(\frac{\alpha_n^2k^2(N_0^2-\omega_n^2(k))}{\omega_n^2(k)}-\frac{4\alpha_n^4\chi^2k^2}{\omega_n^2(k)}\,x^2\Big)\psi_n(x)=0,\\ \psi_n(+\infty,k)=\psi_n(-\infty,k)=0.\end{gathered}\tag{2.5}$$

В случае если выполняются условия

$$\frac{4\alpha_n^4\chi^2k^2}{\omega_n^2(k)}=1,\qquad\frac{\alpha_n^2k^2(N_0^2-\omega_n^2(k))}{\omega_n^2(k)}=2n+1,\qquad n=0,1,2,\ldots,\tag{2.6}$$

уравнение (2.5) совпадает с уравнением

$$\frac{\partial^2\psi_n(x)}{\partial x^2}+(\lambda-x^2)\psi_n(x)=0,\qquad\lambda=2n+1,$$

решением которого являются функции Чебышева — Эрмита

$$\psi_n(x)=H_n(x)\,\exp\,(-x^2/2)$$

($H_n(x)$ — полином Эрмита $n$-й степени [12, 13]). Поэтому решение (2.4) принимает вид

$$\varphi_n(z,k)=B_nH_n(z/\alpha_n)\exp\,(-z^2/(2\alpha_n^2)),\tag{2.7}$$

где согласно (2.6)

$$\alpha_n(k)=\sqrt{\omega_n(k)/(2\chi k)}\,;\tag{2.8}$$

$$\omega_n(k)=\big(\sqrt{\chi_n^2+k^2N_0^2}-\chi_n\big)/k,\qquad\chi_n=\chi(2n+1).\tag{2.9}$$

Из условия нормировки

$$B_n^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(N_0^2-4\chi^2z^2)H_n^2\Big(\frac{z}{\alpha_n}\Big)\exp\Big(-\frac{z^2}{\alpha_n^2}\Big)\,dz=1$$

находим константу $B_n$:

$$B_n=[\alpha_n\|H_n\|^2(N_0^2-4\chi^2\alpha_n^2(n+1/2))]^{-1/2}\tag{2.10}$$

($\|H_n\|=\sqrt{2^nn!\sqrt{\pi}}$ — норма полинома Эрмита $n$-й степени [12, 13]).

Таким образом, ортонормированные собственные функции $\varphi_n(z,k)$ и дисперсионные кривые $\omega_n(k)$ определяются формулами (2.7), (2.9) соответственно, $\alpha_n(k)$ определяется из (2.8).

Перейдем к вычислению асимптотик интегралов $J_n^{\pm}$ при $\xi\to\infty$. Заметим, что при фиксированных $y$, $z$, $z_0$ последовательное интегрирование по частям подынтегрального выражения в (2.2) дает оценку $O(\xi^{-\infty})$, так как все внеинтегральные подстановки обращаются в нуль (на нижнем пределе — в силу четности по $k$ амплитуды подынтегрального выражения и нечетности фазовой функции, на верхнем пределе — в силу экспоненциального убывания по $k$ собственной функции $\varphi_n(z,k)$).

Рассмотрим асимптотику (2.2) при $\xi \to \infty$ и малых $z$, $z_0$, $y$. Заметим, что физический смысл имеет поле не точечного, а распределенного источника, имеющего конечные размеры, т. е. представленные ниже выражения для поля нуждаются в осреднении по координатам источника, в частности по вертикальной координате $z_0$. Поскольку при таком осреднении вклады каждой осциллирующей моды при $y/\xi \to 0$, $\xi \to \infty$ пренебрежимо малы (так как интеграл, на котором они осциллируют, при $k \to \infty$ стремится к нулю), далее будем рассматривать моду $n = 0$, играющую основную роль при $\xi \to \infty$ (при этом индекс $n$ опускается).

Собственная функция $\varphi(z,k)$ имеет вид (см. (2.7)–(2.10))

$$\varphi(z,k) = \Big(\frac{2\chi}{\pi}\Big)^{1/4}\Big(\frac{k}{\omega(k)}\Big)^{3/4}(k\omega(k)+\chi)^{-1/2}\exp\Big(-\frac{\chi k z^2}{\omega(k)}\Big). \tag{2.11}$$

Поскольку основной вклад в интеграл (2.2) определяется большими $k$, при $k > A$, где $A$ достаточно велико, функции $\omega(k)$, $\nu(k)$, $\alpha^{-2}(k)$ разложим в ряды

$$\begin{gathered}\omega(k) = N_0 - \chi k^{-1} + O(k^{-2}), \qquad \nu(k) = k - O(k^{-1}),\\ \alpha^{-2}(k) = 2\chi k/N_0 + 2\chi^2/N_0^2 + O(k^{-1}).\end{gathered} \tag{2.12}$$

Область интегрирования в (2.2) разобьем на две области: от 0 до $A$ и от $A$ до $\infty$. Тогда с помощью интегрирования по частям для интеграла в первой области получаем оценку $O(\xi^{-1})$. При интегрировании во второй области входящие в интеграл (2.2) функции заменим их разложениями (2.11), (2.12). В результате имеем

$$\begin{gathered}J^{\pm} = \operatorname{Re} D\int_A^\infty \exp\Big(-\frac{(z^2+z_0^2)\chi}{N_0}\,k - i\Big(\pm\frac{\chi\xi}{kV} + ky\Big)\Big)\frac{dk}{k^{3/2}},\\ D = \frac{\chi^{1/2}}{2^{1/2}\pi^{3/2}VN_0^{1/2}}\exp\Big(\pm i\xi\,\frac{N_0}{V}\Big).\end{gathered} \tag{2.13}$$

В интеграле (2.13) нижний предел заменим на нуль, однако нетрудно заметить, что при этом допускается ошибка порядка $O(\xi^{-1})$. Далее, выполнив замену переменной $k = 1/u$, получаем

$$J^{\pm} = \operatorname{Re} D\int_0^\infty \exp\Big(-\frac{(z^2+z_0^2)\chi}{N_0 u} + i\Big(\mp\frac{\chi\xi}{V}\,u - \frac{y}{u}\Big)\Big)\frac{du}{u^{1/2}}. \tag{2.14}$$

Интегралы (2.14) выражаются в элементарных функциях

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-pu - q/u)}{\sqrt{u}}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\exp\big(-2\sqrt{pq}\big) \qquad (\operatorname{Re} p \geqslant 0, \quad \operatorname{Re} q \geqslant 0),$$

$$p = \pm i\chi\xi/V, \qquad q = (z^2+z_0^2)\chi/N_0 + iy,$$

где под квадратным корнем понимается регулярная ветвь, принимающая положительные значения при положительных аргументах (разрез расположен вдоль отрицательной оси аргумента).

Вводя обозначение

$$r = \sqrt{y^2 + [(z^2 + z_0^2)\chi/N_0]^2}, \qquad \gamma = \sqrt{2\chi/V},$$

выражение асимптотики $G(\xi, y, z, z_0)$ для старшей моды ($n = 0$) при $\xi \to \infty$ и малых $r$ запишем в виде

$$G(\xi, y, z, z_0) = \frac{1}{\pi\sqrt{2VN_0\xi}}\Big[\exp\big(-\gamma\sqrt{r+y}\sqrt{\xi}\big)\cos\Big(\frac{\pi}{4} - \frac{N_0}{V}\,\xi - \gamma\sqrt{r-y}\sqrt{\xi}\Big) + \\ + \exp\big(-\gamma\sqrt{r-y}\sqrt{\xi}\big)\cos\Big(\frac{\pi}{4} - \frac{N_0}{V}\,\xi - \gamma\sqrt{r+y}\sqrt{\xi}\Big)\Big], \qquad (2.15)$$

где величина $2\chi V^{-1} r\xi$ имеет порядок $O(1)$. Полагая в (2.15) $y = 0$, получаем

$$G = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{VN_0\xi}}\exp\Big(-\chi\sqrt{\frac{2(z^2+z_0^2)\xi}{N_0V}}\Big)\cos\Big(\frac{\pi}{4} - \frac{N_0}{V}\,\xi - \chi\sqrt{\frac{2(z^2+z_0^2)\xi}{N_0V}}\Big).$$

Если при этом источник и точка наблюдения находятся на термоклине, т. е. $z = z_0 = 0$, имеем

$$G = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{VN_0\xi}}\cos\Big(\frac{N_0}{V}\,\xi - \frac{\pi}{4}\Big).$$

Отсюда следует, что волновое поле, осциллируя с частотой $N_0/V$, убывает подобно $\xi^{-1/2}$.

Таким образом, полученные асимптотические решения позволяют описывать пространственную структуру внутренних гравитационных волн вблизи траекторий движения источников возмущений. При этом показано, что на больших расстояниях вклад в волновое поле высших мод генерации пренебрежимо мал.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Булатов В. В.** Внутренние гравитационные волны в неоднородных средах / В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров. М.: Наука, 2005.
2. **Bulatov V. V.** Internal gravity waves: theory and applications / V. V. Bulatov, Yu. V. Vladimirov. M.: Nauka, 2007.
3. **Miropol'skii Yu. Z.** Dynamics of internal gravity waves in the ocean / Yu. Z. Miropol'skii, O. V. Shishkina. Boston: Kluwer Acad. Publ., 2001.
4. **Воляк К. И.** Избранные труды. Нелинейные волны в океане. М.: Наука, 2002.
5. **Молотков И. А.** Нелинейные локализованные волновые процессы / И. А. Молотков, С. А. Вакуленко, М. А. Бисярин. М.: Янус-К, 1999.
6. **Методы**, процедуры и средства аэрокосмической радиотомографии приповерхностных областей Земли / Под ред. С. В. Нестерова, А. С. Шамаева, С. И. Шамаева. М.: Науч. мир, 1996.
7. **Степанянц Ю. А.** Распространение волн в сдвиговых потоках / Ю. А. Степанянц, А. Л. Фабрикант. М.: Наука, 1996.
8. **Булатов В. В., Владимиров Ю. В.** О расчете собственных функций и дисперсионных кривых основной вертикальной спектральной задачи уравнения внутренних гравитационных волн // Мат. моделирование. 2007. Т. 19, № 2. С. 59–68.
9. **Булатов В. В., Владимиров Ю. В.** Об асимптотике критических режимов генерации внутренних гравитационных волн // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2000. № 5. С. 124–128.

10. **Санников В. Ф.** Улучшение сходимости по модам внутренних волн, создаваемых движущимся диполем // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, № 5. С. 796–802.
11. **Булатов В. В., Ваньян П. Л., Владимиров Ю. В., Морозов Е. Г.** Распространение внутренних приливных волн в северо-западной части Тихого океана // Изв. Акад. инж. наук РФ. Прикл. математика и информатика. 2000. Т. 1. С. 112–117.
12. **Градштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М.: Физматгиз, 1962.
13. **Люк Ю. Л.** Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980.

*Поступила в редакцию 2/IV 2007 г.,*
*в окончательном варианте — 4/VI 2007 г.*