

УДК 532.527

## ДАЛЬНИЕ ПОЛЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СКОРОСТЯХ ДВИЖЕНИЯ ИСТОЧНИКА ВОЗМУЩЕНИЙ

© 2015 г. В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН*

*119526 Москва, пр. Вернадского, 101-1*

*E-mail: internalwave@mail.ru*

Поступила в редакцию 08.10.2014 г., после доработки 15.12.2014 г.

Рассмотрена задача о дальнем поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемом движущимся источником возмущений в стратифицированной среде. Построены равномерные асимптотики, описывающие амплитудно-фазовую структуру волновых полей для различных режимов движения источника. Волновая картина, в том числе положение фронта, в докритическом режиме движения источника определяется волнами с волновыми числами, ограниченными снизу некоторой положительной величиной, а при сверхкритическом режиме в формировании волновой картины участвуют волны всех диапазонов, а фронт определяется только длинными волнами. Фазовая картина в первом случае состоит из продольных и поперечных волн, убывающих степенным образом, во втором — только из продольных волн, убывающих экспоненциально. Равномерная асимптотика дальнего поля в первом случае состоит из двух слагаемых, одно из которых выражается через функцию Эйри, а второе — через ее производную, во втором случае в асимптотике присутствует только член, который выражается через функцию Эйри.

**Ключевые слова:** внутренние гравитационные волны, стратифицированная среда, дальние поля, равномерные асимптотики.

DOI: 10.7868/S0002351515060048

Одним из основных механизмов возбуждения внутренних гравитационных волн в природных стратифицированных средах (океан, атмосфера) является их генерация источниками возмущений различной физической природы, как природного (движущийся тайфун, обтекание неровностей рельефа океана, подветренные горы), так и антропогенного (морские технологические конструкции, схлопывание области турбулентного перемешивания, подводные взрывы) характера [1–8]. В линейном приближении дальние волновые поля можно исследовать с помощью асимптотик [3]. Построенные аналитические конструкции позволяют в дальнейшем, в том числе с использованием средств компьютерной математики, получать асимптотические представления волновых полей с учетом реальной неоднородности и нестационарности параметров природных стратифицированных сред [9].

В настоящей работе рассматривается задача о дальних полях внутренних гравитационных волн, возникающих при обтекании точечного источника возмущений мощности  $Q$  потоком стратифицированной среды толщины  $H$ . Предполагается,

что источник движется со скоростью  $V$  в горизонтальном направлении вдоль оси  $x$ , ось  $z$  направлена вверх, глубина залегания источника —  $z_0$ , и рассматривается установившийся режим волновых колебаний. В линейной постановке и с учетом приближения Буссинеска имеем следующее уравнение, например, для вертикального смещения изопоикн (линий равной плотности)  $\eta(x, y, z)$  [1–4]

$$V^2 \frac{\partial^2 \Delta \eta}{\partial x^2} + N^2(z) \Delta_2 \eta = QV \frac{d\delta(x)}{dx} \delta(y) \frac{d\delta(z - z_0)}{dz}, \quad (1)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ,  $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz}$  — частота Брента–Вяйсяля, которая далее предполагается постоянной ( $\rho_0(z)$  — невозмущенная плотность),  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака. Функция  $\eta(x, y, z)$  связана с вертикальной скоростью  $w(x, y, z)$  соотношением  $w = V \partial \eta / \partial x$ . В качестве граничных условий используется условие “твердой крышки”

$$\eta = 0, \quad z = 0, -H. \quad (2)$$

В безразмерных координатах  $x^* = \frac{x\pi}{H}$ ,  $y^* = \frac{y\pi}{H}$ ,

$z^* = \frac{z\pi}{H}$ ,  $\eta^* = \frac{\eta VH}{\pi Q}$  уравнение (1) и граничные условия (2) переписываются следующим образом (знак “\*” далее опускается)

$$\frac{\partial^2 \Delta \eta}{\partial x^2} + \frac{1}{M^2} \Delta_2 \eta = \frac{d\delta(x)}{dx} \delta(y) \frac{d\delta(z-z_0)}{dz}, \quad (3)$$

$$\eta = 0, \quad z = 0, -\pi,$$

где  $M = V/c$ ,  $c = NH/\pi$ . В данной постановке задачи параметр  $M$  характеризует отношение скорости источника возмущений  $V$  к максимальному значению групповой скорости  $c$  внутренних гравитационных волн [1–4].

Решение задачи (3) ищется в виде интеграла Фурье

$$\eta(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu, \nu, z) \exp(-i(\mu x + \nu y)) d\mu. \quad (4)$$

Тогда для функции  $\varphi(\mu, \nu, z)$  получим следующую краевую задачу ( $k^2 = \mu^2 + \nu^2$ )

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 (\mu^{-2} M^{-2} - 1) \varphi = \frac{1}{i\mu} \frac{d\delta(z-z_0)}{dz_0}, \quad (5)$$

$$\varphi = 0, \quad z = 0, -\pi.$$

Решение задачи (5) можно представить в виде суммы вертикальных (нормальных) мод [3, 4]

$$\varphi(\mu, \nu, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\mu, \nu, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\mu, \nu) \sin nz, \quad (6)$$

т.е. в виде ряда по собственным функциям одномерной краевой задачи, соответствующей уравнению (5). Подставив разложение (6) в (5) для  $B_n(\mu, \nu)$  можно получить следующее выражение:

$$B_n(\mu, \nu) = \frac{2n \cos nz_0}{i\pi\mu k^2 (\mu^{-2} M^{-2} - 1) - n^2}. \quad \text{Тогда искомое решение (4) представится в виде суммы мод}$$

$$\eta(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(x, y, z),$$

$$\eta_n(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \frac{2n}{i\pi\mu} \times \quad (7)$$

$$\times \frac{\exp(-i(\mu x + \nu y))}{k^2 (\mu^{-2} M^{-2} - 1) - n^2} d\mu \cos nz_0 \sin nz.$$

Приравнявая к нулю знаменатель в (7), можно получить дисперсионное соотношение, связыва-

ющее горизонтальную  $\mu$  и вертикальную  $\nu$  компоненты волнового вектора  $k$

$$k^2 (\mu^{-2} M^{-2} - 1) = n^2. \quad (8)$$

Разрешая биквадратное уравнение (8) относительно  $\mu$ , получим два действительных корня (дисперсионные кривые)

$$\mu = \pm \mu_n(\nu), \quad \mu_n(\nu) = \sqrt{\frac{-(n^2 - m^2 + \nu^2) + \sqrt{(n^2 - m^2 + \nu^2)^2 + 4\nu^2 m^2}}{2}}. \quad (9)$$

где  $m = 1/M$ , и два мнимых корня

$$\mu = \pm i\lambda_n(\nu), \quad \lambda_n(\nu) = \sqrt{\frac{(n^2 - m^2 + \nu^2) + \sqrt{(n^2 - m^2 + \nu^2)^2 + 4\nu^2 m^2}}{2}}. \quad (10)$$

В слагаемых из (7) контур интегрирования по  $\mu$  смещен в верхнюю полуплоскость комплексного переменного  $\mu (\epsilon > 0)$ . Это сделано с целью удовлетворить условию излучения – отсутствию распространения волн вверх по потоку [3, 4]. Замыкая контур интегрирования по  $\mu$  в верхнюю полуплоскость (и учитывая вычеты при  $\mu = \pm \mu_n(\nu)$  (9) и при  $\mu = -i\lambda_n(\nu)$  (10)), получим

$$\eta_n(x, y, z) = \begin{cases} J_\lambda \frac{2n}{\pi} \sin nz \cos nz_0, & \text{при } x < 0 \\ (J_\mu^+ + J_\mu^- - J_\lambda) \frac{2n}{\pi} \sin nz \cos nz_0, & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$J_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A_\lambda(\nu) \exp(-\lambda_n(\nu)|x|) \cos \nu y d\nu,$$

$$J_\mu^\pm = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_\mu(\nu) \cos(\mu_n(\nu)x \pm \nu y) d\nu, \quad (12)$$

$$A_\mu(\nu) = \frac{1}{2\mu_n^4(\nu)M^2 + \nu^2}, \quad A_\lambda(\nu) = \frac{1}{2\lambda_n^4(\nu)M^2 + \nu^2}.$$

Далее будем рассматривать только старшую моду ( $n = 1$ ), опуская индекс  $n$ , и поле возвышения  $\eta$  для этой моды в двух случаях:  $M < 1$  и  $M > 1$ .

Первый случай  $M < 1$  соответствует докритическому режиму движения источника возмущений. Оценим сначала интеграл  $J_\lambda$ . Функция  $J(\nu)$  при малых  $\nu$  имеет разложение:  $\lambda(\nu) = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \nu + O(\nu^3)$ .

С помощью интегрирования по частям получим

$$\text{при } |x| \rightarrow \infty: J_\lambda(x) = \frac{M^2}{2\pi\sqrt{1-M^2}|x|} + O\left(\frac{1}{|x|^3}\right).$$

Основной вклад в поведение поля  $\eta$  в дальней зоне вносят

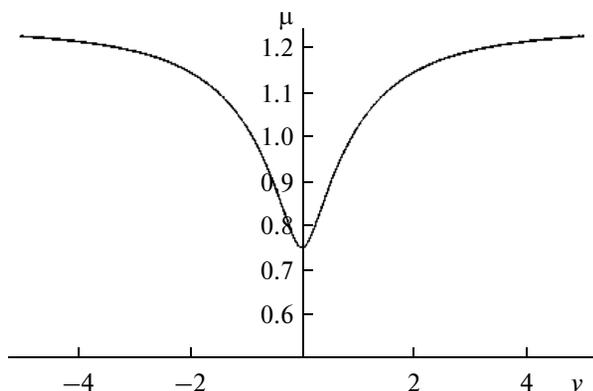


Рис. 1. Дисперсионная кривая  $\mu(v)$  ( $M = 0.8$ ).

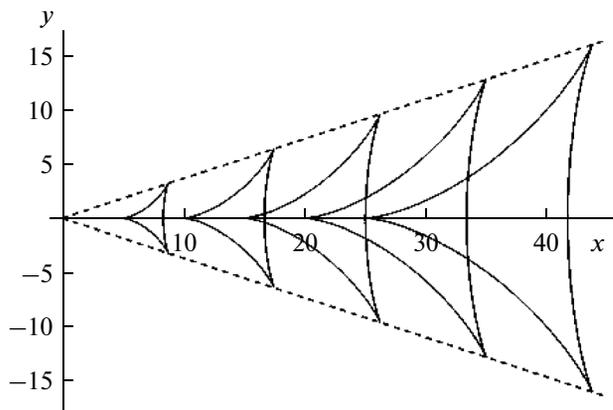


Рис. 2. Линии одинаковой фазы волнового поля возвышений ( $M = 0.8$ ).

интегралы  $J_\mu^+$  и  $J_\mu^-$ . Эти интегралы равны друг другу, так как  $\mu(v)$  – четная функция, поэтому далее будем рассматривать интеграл  $J_\mu^-$ . В силу симметрии волновой картины относительно оси  $x$  будем для определенности считать  $y > 0$ . Введем далее обозначения:  $\Phi = \mu(v)x - \nu y$ ,  $\Phi = xS(v, \rho)$ ,  $S(v, \rho) = \mu(v) - \rho\nu$ ,  $\rho = y/x$ . Тогда стационарные точки функции  $S(v, \rho)$  определяются из уравнения

$$S'_\nu(v, \rho) = 0, \text{ или } \mu'(v) = \rho. \tag{13}$$

Добавив к уравнению (13) выражение для фазы  $\Phi$ , можно получить параметрическое семейство линий равной фазы (с параметром  $\nu$ ):  $x(\nu) = \frac{\Phi}{\mu(\nu) - \mu'(\nu)\nu}$ ,

$y(\nu) = \frac{\mu'(\nu)\Phi}{\mu(\nu) - \mu'(\nu)\nu}$ . Дисперсионная кривая  $\mu(v)$  изображена на рис. 1 для случая  $M = 0.8$  при малых  $\nu$ :  $\mu(v) = \frac{\sqrt{1-M^2}}{M}\nu + O(\nu^3)$ , при  $\nu \rightarrow \infty$ :

$\mu(v) \rightarrow \frac{1}{M}$ . Линии равной фазы изображены на рис. 2 для  $\Phi = 2\pi k$ ,  $k = 1 - 5$ , и они выходят из точек с координатами  $(2\pi k M, 0)$ . При фиксированном  $\rho$  имеем две стационарные точки  $\nu_1$  и  $\nu_2$ ,  $\nu_2 > \nu_1$ , при этом  $\nu_2 > \nu_*$ , а  $\nu_1 < \nu_*$ , где  $\nu_*$  – точка перегиба кривой  $\mu(v)$  ( $\nu_* \approx 0.32$ ). Поперечным линиям равной фазы отвечают стационарные точки  $0 < \nu_1 < \nu_*$  (в верхней половине рисунка), продольным – стационарные точки  $\nu_2 > \nu_*$ . Фронт волны (штриховые линии) описывается зависимостью:  $y = \mu'(\nu_*)x$ .

При больших положительных  $x$  интеграл  $J_\mu^-$  можно вычислить методом стационарной фазы

$$J_\mu^- = J_1^- + J_2^-,$$

$$J_1^- = \frac{A(\nu_1(\rho))}{\sqrt{2\pi x S''_{\nu\nu}(\nu_1(\rho), \rho)}} \cos\left(xS(\nu_1(\rho), \rho) + \frac{\pi}{4}\right), \tag{14}$$

$$J_2^- = \frac{A(\nu_2(\rho))}{\sqrt{-2\pi x S''_{\nu\nu}(\nu_2(\rho), \rho)}} \cos\left(xS(\nu_2(\rho), \rho) - \frac{\pi}{4}\right).$$

Приближение (14) не работает в окрестности фронта, где  $\mu''(v) \rightarrow 0$ , а стационарные точки приближаются друг к другу и к точке  $\nu_*$ . Поэтому целью является построение равномерной асимптотики, работающей в окрестности фронта, а вдали от фронта, совпадающей с приближением стационарной фазы (14). Интеграл  $J_\mu^-$  принадлежит к классу интегралов с двумя сливающимися стационарными точками [10], поэтому сделаем далее замену переменных

$$S(v, \rho) = a + \sigma s - \frac{s^3}{3}, \tag{15}$$

и при этом потребуем, чтобы стационарной точке  $\nu_1(\rho)$  соответствовала точка  $s_1 = -\sqrt{\sigma}$ , а точке  $\nu_2(\rho)$  – точка  $s_2 = \sqrt{\sigma}$ . Тогда из (15) следует, что

$$a(\rho) = \frac{S(\nu_1(\rho), \rho) + S(\nu_2(\rho), \rho)}{2}, \tag{16}$$

$$\sigma(\rho) = \left(\frac{3}{4}(S(\nu_2(\rho), \rho) - S(\nu_1(\rho), \rho))\right)^{2/3}.$$

Интеграл  $J_\mu^-$  при замене (15) перейдет в

$$J_\mu^- = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(s) \cos\left(x\left(a + \sigma s - \frac{s^3}{3}\right)\right) ds, \tag{17}$$

$$G(s) = A(\nu(s)) \frac{d\nu}{ds}.$$

Представим медленно меняющуюся функцию  $G(s)$  в виде

$$G(s) = b_0 + b_1 s, \tag{18}$$

$$b_0(\rho) = \frac{G(\sqrt{\sigma}) + G(-\sqrt{\sigma})}{2}, \quad b_1(\rho) = \frac{G(\sqrt{\sigma}) - G(-\sqrt{\sigma})}{2\sqrt{\sigma}}. \tag{19}$$

Входящие в выражение для  $G(\pm\sqrt{\sigma})$  значения  $dv/ds$  можно найти, дважды дифференцируя равенство (15) по  $s$ . Тогда получим

$$G(\sqrt{\sigma}) = A(v_2(\rho)) \sqrt{\frac{-2\sqrt{\sigma(\rho)}}{S''_{vv}(v_2(\rho), \rho)}}, \tag{20}$$

$$G(-\sqrt{\sigma}) = A(v_1(\rho)) \sqrt{\frac{2\sqrt{\sigma(\rho)}}{S''_{vv}(v_1(\rho), \rho)}}.$$

Подставляя выражения (18), (20) в (17), представим  $J_\mu^-$  в виде суммы двух слагаемых

$$J_\mu^- = I_1 + I_2, \tag{21}$$

первое из которых выражается через функцию Эйри  $Ai(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(xt - \frac{t^3}{3}\right) dt$ , а второе – через производную функции Эйри [10]

$$I_1 = \frac{b_0(\rho)}{x^{1/3}} \cos(xa(\rho)) Ai(\sigma(\rho)x^{2/3}), \tag{22}$$

$$I_2 = \frac{b_1(\rho)}{x^{2/3}} \sin(xa(\rho)) Ai'(\sigma(\rho)x^{2/3}),$$

где  $b_0(\rho)$  и  $b_1(\rho)$  определены в (19), а  $\sigma(\rho)$  и  $a(\rho)$  – в (16). При наклонах  $\rho > \rho_*$ , где  $\rho_* = \mu'(v_*)$  ( $\rho_* \approx 0.363$ ) стационарные точки  $v_1(\rho)$  и  $v_2(\rho)$  становятся комплексно сопряженными, а выражения (22) остаются действительными. Равномерная асимптотика (21), (22) регулярна в окрестности волнового фронта, где  $S'_v$  и  $S''_{vv}$  равны нулю, при этом  $b_0 = G(0)$ ,  $b_1 = G'(0)$ . В регулярности функции  $G$  и ее производной в нуле можно убедиться, продифференцировав равенство (15) в нуле трижды и четырежды соответственно. Вдали от фронта равномерная асимптотика совпадает с равномерной асимптотикой (14), в чем можно убедиться, подставив в выражение (22) вместо функции Эйри и ее производной их асимптотики при больших положительных значениях аргумента:  $Ai(x) \sim \frac{1}{x^{1/4}\sqrt{\pi}} \times \cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $Ai'(x) \sim \frac{x^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)$ . Отметим, что вдали от волнового фронта оба интеграла в (21) имеют одинаковый порядок  $O(x^{-1/2})$ , а в окрестности фронта основной вклад вносит интеграл  $I_1$ , который имеет порядок  $O(x^{-1/3})$ , в то время как интеграл  $I_2$  имеет порядок  $O(x^{-2/3})$ .

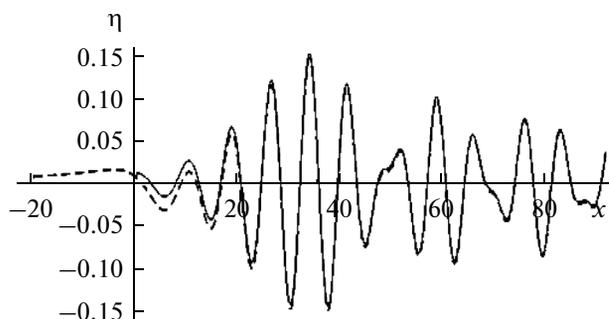


Рис. 3. Точное поле возвышения (штриховая линия) и равномерная асимптотика (сплошная линия).

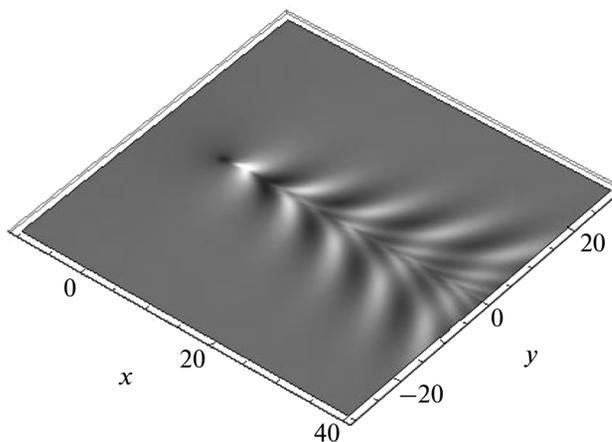


Рис. 4. Поле возвышения внутренних гравитационных волн от движущегося с докритической скоростью источника возмущений.

На рис. 3 изображены точное поле возвышения  $\eta$ , рассчитанное по формулам (11), (12) (штриховая линия), и равномерная асимптотика интеграла  $J_\mu^-$ , рассчитанная по формулам (21), (22) (сплошная линия). Расчеты проводились для  $M = 0.8$  при фиксированном  $y = 13$ , множитель  $\frac{2}{\pi} \sin z \cos z_0$  из (11) брался равным единице. На рис. 4 показана трехмерная картина точного поля возвышения  $\eta(x, y)$ , рассчитанная по формулам (11), (12) с теми же значениями числа  $M$  и множителем  $\frac{2}{\pi} \sin z \cos z_0$ , равным единице.

Второй случай  $M > 1$  соответствует сверхкритическому режиму движения источника возмущений. Дисперсионная кривая  $\lambda(v)$  в нуле имеет разложение:  $\lambda(v) = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} + O(v^2)$ . Отсюда следует экспоненциальное затухание интеграла  $J_\lambda(x)$  при  $|x| \rightarrow \infty$ :  $J_\lambda(x) \sim O\left(|x|^{-1/2} \exp(-\sqrt{1 - M^{-2}}|x|)\right)$ .

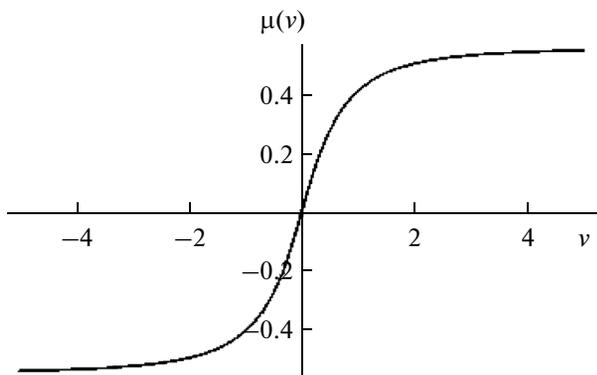


Рис. 5. Дисперсионная кривая  $\mu(v)$  ( $M = 1.8$ ).

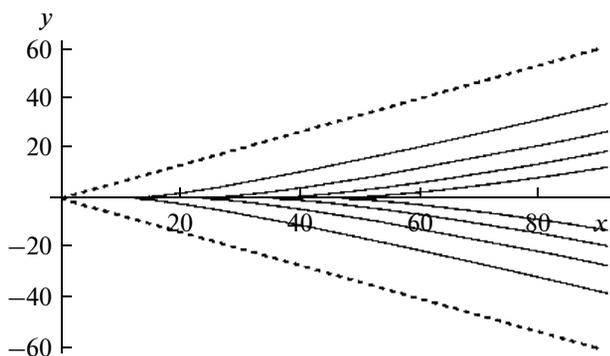


Рис. 6. Линии одинаковой фазы волнового поля возвышения ( $M = 1.8$ ).

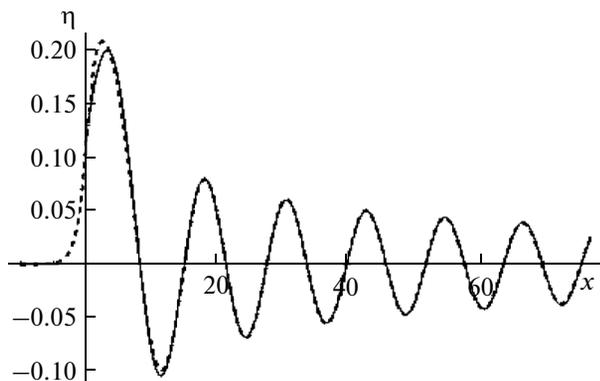


Рис. 7. Точное поле возвышения (пунктирная линия) и равномерная асимптотика (сплошная линия).

Дисперсионная кривая  $\mu(v)$  является нечетной функцией. Она изображена на рис. 5 для  $M = 1.8$ . Интеграл  $J_{\mu}^{-}$  дает основной вклад в поведение дальнего волнового поля при  $y > 0$ , а интеграл  $J_{\mu}^{+}$  – в поведение дальнего поля при  $y < 0$ . Далее будем для определенности рассматривать интеграл  $J_{\mu}^{-}$ . Функция  $S(v, \rho)$  – нечетная функция переменной  $v$  с точкой перегиба в нуле. Стационарные точки, определяемые из (13), в этом случае различаются только знаком:  $v_2(\rho) = v(\rho)$ ,  $v_1(\rho) = -v(\rho)$ . Линии

равной фазы изображены на рис. 6 для случая  $M = 1.8$ ,  $\Phi = 2\pi k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . Это продольные линии (поперечных нет), выходящие, как и в случае  $M < 1$ , из точек с координатами  $(2\pi k M, 0)$ . Фронт волны (штриховые линии) описывается зависимостью:  $y = \mu'(0)x$ , где  $\mu'(0) = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}$ . Равномерная

асимптотика интеграла  $J_{\mu}^{-}$  выглядит гораздо проще, чем в случае  $M < 1$ , так как в силу симметрии стационарных точек и нечетности функции  $S(v, \rho)$  величина  $a$  из (15) равна нулю, поэтому второе слагаемое из (22), содержащее производную функции Эйри, отсутствует [3, 4, 10]

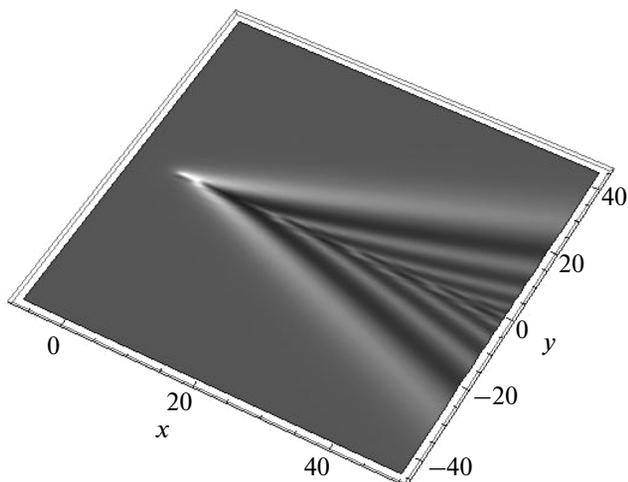
$$J_{\mu}^{-} = \frac{A(v(\rho))}{x^{1/3}} \sqrt{\frac{2 \left(\frac{3}{2} S(v(\rho), \rho)\right)^{1/3}}{-S''_{vv}(v(\rho), \rho)}} \times \text{Ai} \left( x^{2/3} \left(\frac{3}{2} S(v(\rho), \rho)\right)^{2/3} \right), \tag{23}$$

где выражения для  $A(v)$  и  $S(v, \rho)$  те же, что и для случая  $M < 1$ . Равномерная асимптотика (23) при больших значениях  $x$  переходит в неравномерную, которая вычисляется методом стационарной фазы

$$J_{\mu}^{-} = A(v(\rho)) \sqrt{\frac{2}{-\pi x S''_{vv}(v(\rho), \rho)}} \cos \left( x S(v(\rho), \rho) - \frac{\pi}{4} \right).$$

На рис. 7 изображены точное поле возвышения  $\eta$ , рассчитанное по формулам (11), (12) (штриховая линия), и равномерная асимптотика, рассчитанная по формуле (23) (сплошная линия). Расчеты проводились для  $M = 1.8$  при фиксированном  $y = 1$ , множитель  $\frac{2}{\pi} \sin z \cos z_0$  брался равным единице.

Укажем на основные качественные различия волновой картины дальних полей внутренних гравитационных волн для случаев  $M < 1$  (докритический режим движения источника возмущений) и  $M > 1$  (сверхкритический режим движения источника возмущений). Волновая картина в первом случае определяется значениями  $k > k_0 = \sqrt{M^{-2} - 1}$ , фронт формируется волнами с  $k_* = \sqrt{v_*^2 + \mu^2(v_*)}$ , во втором случае в формировании волновой картины участвуют волны произвольной длины с  $0 < k < \infty$ , а фронт определяется длинными волнами с  $k \rightarrow 0$ . Фазовая картина в первом случае состоит из продольных и поперечных волн, во втором – только из продольных. В первом случае волновое поле вверх по потоку убывает степенным образом (как  $x^{-1}$ ), во втором – экспоненциально. Равномерная асимптотика дальнего поля в первом случае состоит из двух слагаемых, одно из



**Рис. 8.** Поле возвышения внутренних гравитационных волн от движущегося со сверхкритической скоростью источника возмущений.

которых выражается через функцию Эйри, а второе — через ее производную, во втором случае в асимптотике присутствует только член, который выражается через функцию Эйри.

В заключение можно отметить, что подобного рода волновые картины могут наблюдаться при дистанционном зондировании и наблюдении внутренних гравитационных волн, возбуждаемых различными источниками возмущений как в океане, так и в атмосфере Земли [1, 5–8].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 14-01-00466, № 15-05-00030).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pedlosky J.* Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin–Heidelberg: Springer, 2010. 260 p.
2. *Sutherland B.R.* Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 394 p.
3. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. М.: Наука, 2010. 470 с.
4. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Wave dynamics of stratified mediums. М.: Наука, 2012. 584 с.
5. *Свиркунов П.Н., Калашиник М.В.* Фазовые картины волн от локализованных источников, движущихся относительно стратифицированной вращающейся среды (перемешающийся ураган, орографическое препятствие) // ДАН. 2012. Т. 447. № 4. С. 396–400.
6. *Abdilghanie A.M., Diamessis P.J.* The internal gravity wave field emitted by a stably stratified turbulent wake // J. Fluid Mech. 2013. V. 720. P. 104–139.
7. *Mauge R., Gerkema T.* Generation of weakly nonlinear nonhydrostatic internal tides over large topography: a multi-modal approach // Nonlin. Proc. Geophys. 2008. V. 15. P. 233–244.
8. *Rees T., Lamb K.G., Poulin F.J.* Asymptotic analysis of the forces internal gravity waves equation // SIAM J. Appl. Mathemat. 2012. V. 72. № 4. P. 1041–1060.
9. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Дальние поля внутренних гравитационных волн в неоднородных и нестационарных стратифицированных средах // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2013. Т. 6. № 2. С. 55–70.
10. *Borovikov V.A.* Uniform stationary phase method. London: IEE electromagnetic waves, 1994. Ser. 40. 233 p.

## Far Fields of Internal Gravity Waves at Arbitrary Movement Speeds of Source of Disturbances

V. V. Bulatov and Yu. V. Vladimirov

*Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526 Russia*

*e-mail: internalwave@mail.ru*

Received October 8, 2014; in final form, December 15, 2014

**Abstract**—The problem of a far field of internal gravity waves excited by a moving source of disturbances in a stratified medium is considered. The uniform asymptotics describing the amplitude–phase structure of the wave fields for the different conditions of a source movement are constructed. The wave pattern, including the position of a front, under subcritical conditions of source movement is determined by waves with the wave numbers restricted by a certain positive value from below, whereas under supercritical conditions the wave pattern is formed by the waves of all ranges and the front is determined only by long waves. In the first case, the phase portrait represents longitudinal and transverse waves decaying as a power function; in the second case, it is formed only of longitudinal waves decaying exponentially. In the first case, the uniform asymptotics of the far field consists of two terms, one of which is represented by the Airy function and the second is represented by its derivative; in the second case, the asymptotics has only one term that is expressed through the Airy function.

*Key words:* internal gravity waves, stratified medium, far fields, uniform asymptotics