

УДК 532.59:534.1

ДАЛЬНИЕ ПОЛЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ИСТОЧНИКА В ЖИДКОСТИ БЕСКОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

© 2017 г. В.В. Булатов^{*,a}, Ю.В. Владимиров^{*,b}, И.Ю. Владимиров^{**,c}

^{*}Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

^{**}Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва

^ae-mail: internalwave@mail.ru; ^be-mail: vladimyura@yandex.ru;

^ce-mail: iyuvladimirov@rambler.ru

Поступила в редакцию 20.01.2017 г.

Рассмотрена задача о построении равномерных асимптотик дальних полей поверхностных возмущений от локализованного пульсирующего источника в тяжелой однородной жидкости бесконечной глубины. Волновая картина возбуждаемых полей представляет собой сумму волн двух типов: кольцевидных и клиновидных. Полученные решения описывают волновые возмущения вдали от пульсирующего источника возмущений как внутри, так и вне волновых клиньев Кельвина.

Ключевые слова: тяжелая жидкость, пульсирующий источник, возмущение поверхности, клин Кельвина, дальние поля, равномерная асимптотика.

DOI: 10.7868/S0568528117050036

На состояние свободной поверхности океана влияют как находящиеся в толще воды неоднородности (обтекаемые препятствия, изменения рельефа дна, полей плотности и течений), так и различные источники возмущений [1–6]. Для правильной интерпретации данных дистанционного зондирования морской поверхности нужно знать причины, вызывающие те или иные поверхностные явления. Актуальной остается задача исследования процессов поверхностных колебаний неоднородной по плотности и нестационарной морской среды и согласования результатов моделирования с видимыми поверхностными волнениями. Для детального описания широкого круга физических явлений, связанных с динамикой поверхностных возмущений неоднородных и нестационарных природных сред, используются достаточно развитые математические модели [5, 6].

В ряде случаев качественное представление об изучаемом явлении можно получить на основе более простых асимптотических моделей и аналитических методов их исследования. Отметим классические задачи гидродинамики о построении асимптотических решений, описывающих эволюцию поверхностных возмущений, возбуждаемых локализованными источниками в тяжелой однородной жидкости [2, 3, 7, 8]. Построенные модельные решения позволяют в дальнейшем получить асимптотические представления волновых полей с учетом изменчивости и нестационарности реальных природных сред [4–6].

Цель настоящей работы – задача построения равномерных асимптотик дальних полей поверхностных возмущений, возбуждаемых локализованным пульсирующим источником возмущений в потоке тяжелой однородной жидкости бесконечной глубины. Случай стационарного источника возмущений рассмотрен в [8].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМЫ РЕШЕНИЙ

Рассматривается стационарная картина волновых возмущений на поверхности потока идеальной тяжелой жидкости бесконечной глубины, которая движется со скоростью V в положительном направлении оси x . Волны генерируются точечным пульсирующим источником возмущений,

расположенным на глубине H (ось z направлена вверх от невозмущенной жидкости), мощность которого изменяется по закону $q = \exp(i\omega t) \exp(\varepsilon t) (-\infty < t < \infty)$; далее в полученном решении ищется предел при $\varepsilon \rightarrow 0$. В силу линейности задачи для расчета поля возмущений от пульсирующего источника произвольной мощности $Q = \text{const}$ достаточно результат, полученный для источника единичной мощности q , умножить на Q .

Возмущение потенциала $\Phi(x, y, z, t)$ относительно однородного потока, движущегося со скоростью V ($\nabla\Phi = (u, v, w)$, где u, v, w – компоненты возмущения $(V, 0, 0)$), описывается уравнением с соответствующим линеаризованным граничным условием на поверхности жидкости [2, 3, 8]

$$\Delta\Phi(x, y, z, t) = \exp(i\omega t) \exp(\varepsilon t) \delta(x) \delta(y) \delta(z + H), \quad z < 0 \quad (1.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Phi + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0$$

Здесь Δ – трехмерный оператор Лапласа, а $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Решение задачи (1.1) ищется в виде $\Phi(x, y, z, t) = \exp(i\omega t) \exp(\varepsilon t) \varphi(x, y, z)$, где функция $\varphi(x, y, z)$ определяется из задачи

$$\Delta\varphi(x, y, z) = \delta(x) \delta(y) \delta(z + H), \quad z < 0$$

$$\left(i\omega + \varepsilon + V \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = 0$$

Фурье-образ потенциала $\varphi(x, y, z)$

$$\Omega(\mu, \nu, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\mu x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\nu y) \varphi(x, y, z) dy$$

определяется из краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \Omega(\mu, \nu, z)}{\partial z^2} - k^2 \Omega(\mu, \nu, z) = \delta(z + H), \quad z < 0$$

$$(i\omega + \varepsilon - i\mu V)^2 \Omega(\mu, \nu, z) + g \frac{\partial \Omega(\mu, \nu, z)}{\partial z} = 0, \quad z = 0$$

$$\Omega(\mu, \nu, z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty, \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2$$

решение которой в области $-H < z < 0$ имеет вид

$$\Omega(\mu, \nu, z) = -\frac{(\omega - \mu V)^2 \text{sh}(kz) + gk \text{ch}(kz)}{k \exp(kH) ((\varepsilon + i(\omega - \mu V))^2 + gk)}$$

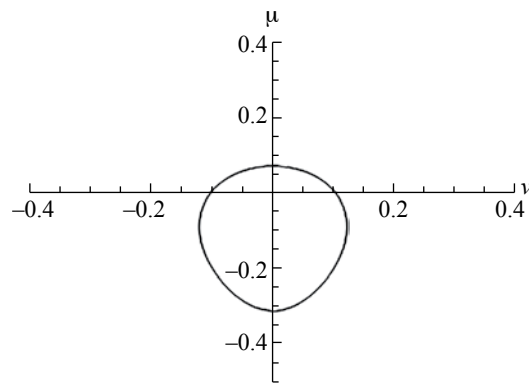
Возвышение свободной поверхности $\eta(x, y, t)$ связано с потенциалом $\Phi(x, y, z, t)$ условием [2, 3]

$$\eta(x, y, t) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi(x, y, z, t) =$$

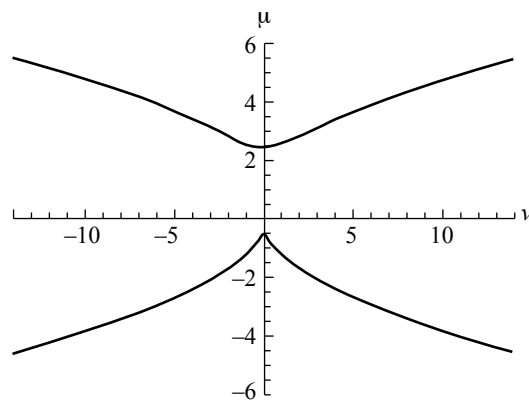
$$= \frac{-\exp(i\omega t + \varepsilon t)}{g} (i(\omega - i\varepsilon) \varphi(z, y, z) + V \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x}), \quad z = 0$$

Тогда фурье-образ $\Lambda(\mu, \nu, t)$ функции $\eta(x, y, t)$ имеет вид

$$\Lambda(\mu, \nu, t) = \frac{i(\omega - \mu V) \exp(i\omega t) \exp(-kH)}{(\varepsilon + i(\omega - \mu V))^2 + gk}$$



Фиг. 1. Дисперсионная кривая $k_1(\psi)$



Фиг. 2. Дисперсионная кривая $k_2(\psi)$

В этом выражении параметр ϵ сохранен только в знаменателе, это нужно для определения смещения полюса подынтегрального выражения относительно действительной оси в верхнюю или нижнюю полуплоскость. Проводя обратное преобразование Фурье, можно получить

$$\eta(x, y, t) = \frac{i \exp(i\omega t)}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ivy) dv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega - \mu V) \exp(-kH - i\mu x) d\mu}{(\epsilon + i(\omega - \mu V))^2 + gk} \quad (1.2)$$

В полярных координатах ($x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$), ($\mu = k \cos \psi$, $v = k \sin \psi$) выражение (1.2) принимает вид

$$\eta(r, \alpha, t) = \frac{\exp(i\omega t)}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\infty} \frac{(\omega - kV \cos \psi) k \exp(-kH - ikr \cos(\psi - \alpha)) dk}{(\omega - i\epsilon - kV \cos \psi)^2 - gk} \quad (1.3)$$

Внутренний интеграл в (1.3) вычисляется с помощью теоремы о вычетах. Для этого необходимо определить полюса подынтегрального выражения, которые являются корнями дисперсионного уравнения

$$(\omega - kV \cos \psi)^2 = gk \quad (1.4)$$

где $k_{1,2}(\psi) = g(1 + 2m \cos \psi \mp \sqrt{1 + 4m \cos \psi}) / (2V^2 \cos^2 \psi)$, $m = V\omega / g$; знак “-” соответствует корню k_1 , а знак “+” – корню k_2 .

Далее будем рассматривать случай, для которого дисперсионное уравнение (1.4) имеет два действительных положительных корня при любых значениях ψ . Для этого необходимо выполнение

условия $m < 1/4$. Методом возмущений можно показать, что при $\varepsilon > 0$ корень $k_1(\psi)$ смещен в нижнюю полуплоскость комплексной плоскости k для любых значений ψ . Корень $k_2(\psi)$ смещен в нижнюю полуплоскость при $\cos \psi > 0$ и в верхнюю полуплоскость при $\cos \psi < 0$. На фиг. 1 и 2 изображены соответственно дисперсионные кривые $k_1(\psi)$, $k_2(\psi)$ в плоскости (ν, μ) . Все численные расчеты проводились для следующих значений параметров: $V = 2.4$ м/с, $\omega = 1$ с⁻¹, $g = 9.8$ м/с², $m = 0.245$.

Рассмотрим вначале вклад корня $k_1(\psi)$ в выражение (1.3) для $\eta(r, \alpha, t)$. Функция $\eta(r, \alpha, t)$ является четной по аргументу α , поэтому далее будем считать, что $0 < \alpha < \pi$. Повернем контур интегрирования по переменной интегрирования k на $\pi/2$ против хода часовой стрелки при условии, что $\cos(\psi - \alpha) < 0$; вычет в этом случае не учитывается, интеграл по мнимой оси имеет порядок $O(1/r^2)$ при $r \rightarrow \infty$. При $\cos(\psi - \alpha) > 0$ контур интегрирования поворачивается на $\pi/2$ по часовой стрелке, и, учитывая вычет, можно получить

$$\eta_1(r, \alpha, t) = \frac{\exp(i\omega t)}{2\pi} \int_{-\pi/2+\alpha}^{\pi/2+\alpha} B(k_1(\psi), \psi) \exp(-ik_1(\psi)r \cos(\psi - \alpha)) d\psi$$

$$B(k, \psi) = \frac{(\omega - kV \cos \psi)k \exp(-kH)}{2V \cos \psi (\omega - kV \cos \psi) + g}$$

Далее рассмотрим вклад корня $k_2(\psi)$ в выражение (1.3) для $\eta(r, \alpha, t)$. В случае $\cos(\psi - \alpha) < 0$ контур интегрирования поворачивается на $\pi/2$ против часовой стрелки. Интеграл по мнимой оси имеет порядок $O(1/r^2)$ при $r \rightarrow \infty$, вычет дает вклад лишь при $\cos \psi < 0$, в результате можно получить

$$\eta_2(r, \alpha, t) = -\frac{\exp(i\omega t)}{2\pi} \int_{\pi/2+\alpha}^{3\pi/2} B(k_2(\psi), \psi) \exp(-ik_2(\psi)r \cos(\psi - \alpha)) d\psi$$

В случае $\cos(\psi - \alpha) > 0$ контур интегрирования поворачивается на $\pi/2$ по часовой стрелке. Вычет дает вклад при $\cos \psi > 0$, интеграл по мнимой оси также имеет порядок $O(1/r^2)$ при $r \rightarrow \infty$, в результате имеем

$$\eta_3(r, \alpha, t) = \frac{\exp(i\omega t)}{2\pi} \int_{-\pi/2+\alpha}^{\pi/2} B(k_2(\psi), \psi) \exp(-ik_2(\psi)r \cos(\psi - \alpha)) d\psi$$

Возвышение свободной поверхности представимо в виде суммы трех слагаемых

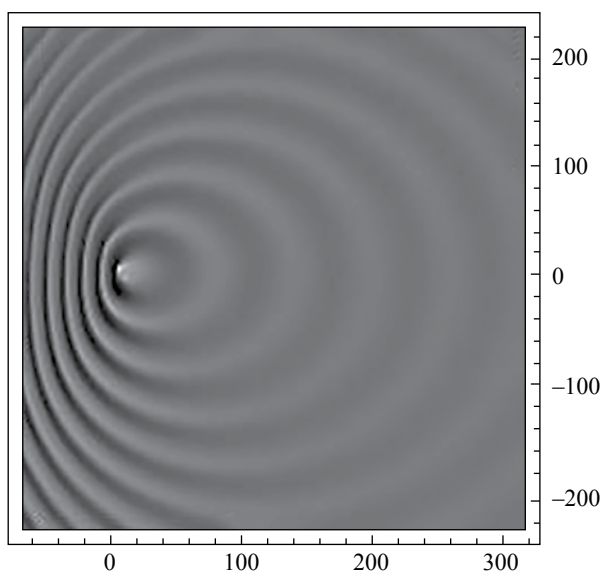
$$\eta(r, \alpha, t) = \eta_1(r, \alpha, t) + \eta_2(r, \alpha, t) + \eta_3(r, \alpha, t) =$$

$$= \frac{\exp(i\omega t)}{2\pi} (J_1(r, \alpha) + J_2(r, \alpha) + J_3(r, \alpha))$$

2. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЯ

Рассмотрим поведение интегралов $J_1(r, \alpha)$, $J_2(r, \alpha)$, $J_3(r, \alpha)$, описывающих полное волновое поле поверхностных возмущений вдали от пульсирующего источника, при больших значениях r .

Оценим сначала интеграл $J_1(r, \alpha)$. Фазовая функция $q(\psi, \alpha) = k_1(\psi)r \cos(\psi - \alpha)$ имеет на интервале интегрирования $(-\pi/2 + \alpha, \pi/2 + \alpha)$ единственную стационарную точку при любом $-\pi < \alpha < \pi$, которая определяется из уравнения $\partial q(\psi, \alpha)/\partial \psi = 0$, или $k_1(\psi) \operatorname{tg} \psi - k_1'(\psi)/k_1(\psi) \operatorname{tg} \psi + k_1(\psi) = \operatorname{tg} \alpha$. Обозначим эту стационарную точку через $\psi_0(\alpha)$. Можно показать, что $\partial^2 q(\psi_0(\alpha), \alpha)/\partial \psi^2 > 0$ при



Фиг. 3. Кольцевые волны, соответствующие $ReJ_1(r, \alpha)$

всех значениях α . Тогда асимптотика интеграла $J_1(r, \alpha)$ вычисляется с помощью метода стационарной фазы и имеет вид

$$J_1(r, \alpha) = \sqrt{2\pi} \left(r \frac{\partial^2 q(\psi, \alpha)}{\partial \psi^2} \right)^{-1/2} B(k_1(\psi), \psi) \exp(i r q(\psi, \alpha) + \pi / 4), \quad \psi = \psi_0(\alpha) \quad (2.1)$$

Интегралу $J_1(r, \alpha)$ соответствуют кольцевые волны на свободной поверхности жидкости, расходящиеся от пульсирующего источника возмущений. На фиг. 3 представлена волновая картина поверхностных возмущений – рассчитанная по (2.1) функция $ReJ_1(r, \alpha)$, глубина залегания источника $H = 5$ м.

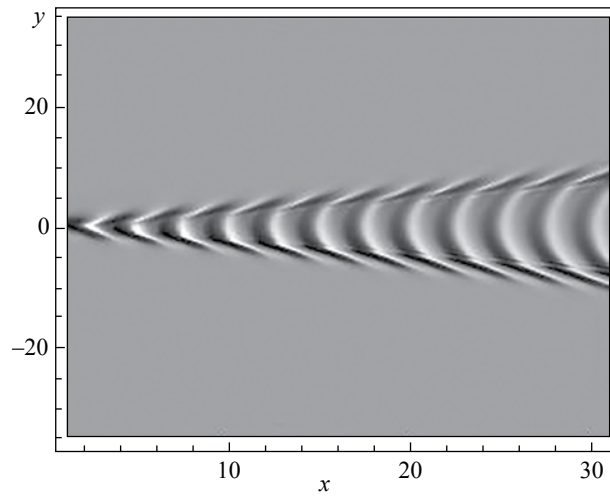
Рассмотрим далее интеграл $J_3(r, \alpha)$. Обозначим $A = \arctg \Theta$, где Θ – максимальное значение по ψ на интервале $(-\pi / 2, 0)$ выражения $k_2(\psi) \operatorname{tg} \psi - k_2'(\psi) / k_2(\psi) \operatorname{tg} \psi + k_2(\psi)$.

Значение A определяет границы волнового клина (клина Кельвина), которые описываются уравнением $y = \pm x \operatorname{tg} A$; в рассматриваемом случае $\operatorname{tg} A = 0.284$. Тогда фазовая функция $q(\psi, \alpha) = k_2(\psi) r \cos(\psi - \alpha)$ на интервале интегрирования $(-\pi / 2 + \alpha, \pi / 2)$ при $\alpha < A$ имеет две стационарные точки $\psi_1(\alpha)$ и $\psi_2(\alpha)$ ($\psi_1(\alpha) < \psi_2(\alpha)$), при $\alpha > A$ – ни одной, и при $\alpha = A$ стационарные точки сливаются ($\psi_1(A) = \psi_2(A)$). Внутри волнового клина поле может быть рассчитано методом стационарной фазы, при этом вклад дают обе стационарные точки $\psi_1(\alpha)$ и $\psi_2(\alpha)$; вне волнового клина поле экспоненциально мало. Однако, в отличие от интеграла $J_1(r, \alpha)$, асимптотика, рассчитанная по методу стационарной фазы, не является равномерной, так как $\partial^2 q(\psi_1(A), A) / \partial \psi^2 = 0$, поэтому в окрестности границы волнового клина Кельвина асимптотика, рассчитанная по методу стационарной фазы, неприменима.

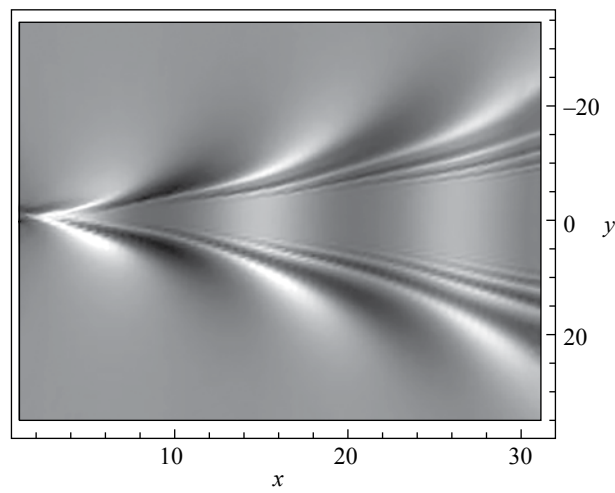
Равномерная асимптотика интеграла $J_3(r, \alpha)$ для больших значений r и для всех значений $0 < |\alpha| < \pi$ строится аналогично [8, 9] и имеет вид

$$J_3(r, \alpha) = \frac{2\pi \exp(ir\lambda(\alpha))}{r^{1/3}} (0.5(F(\sqrt{\sigma(\alpha)}) + F(-\sqrt{\sigma(\alpha)})) Ai(r^{2/3} \sigma(\alpha)) - i \frac{(F(\sqrt{\sigma(\alpha)}) - F(-\sqrt{\sigma(\alpha)}))}{2r^{1/3} \sqrt{\sigma(\alpha)}} Ai'(r^{2/3} \sigma(\alpha))) \quad (2.2)$$

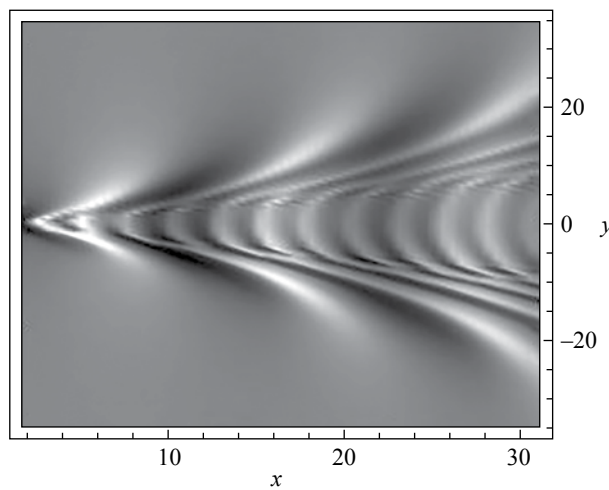
$$\lambda(\alpha) = (q(\psi_1(\alpha), \alpha) + q(\psi_2(\alpha), \alpha)) / 2 \quad \sigma(\alpha) = (3(q(\psi_2(\alpha), \alpha) - q(\psi_1(\alpha), \alpha)) / 4)^{2/3}$$



Фиг. 4. Корабельные волны, соответствующие $\text{Re}J_3(r, \alpha)$



Фиг. 5. Корабельные волны, соответствующие $\text{Re}J_2(r, \alpha)$



Фиг. 6. Сумма двух корабельных волн $\text{Re}(J_2(r, \alpha) + J_3(r, \alpha))$

$$F(\sqrt{\sigma(\alpha)}) = f_2(\alpha) \sqrt{\frac{-2\sqrt{\sigma(\alpha)}}{T_2(\alpha)}}, \quad F(-\sqrt{\sigma(\alpha)}) = f_2(\alpha) \sqrt{\frac{2\sqrt{\sigma(\alpha)}}{T_1(\alpha)}}$$

$$f_j(\alpha) = B(k_2(\psi_j(\alpha), \alpha), \psi_j(\alpha)), \quad T_j(\alpha) = \frac{\partial^2 q(\psi_j(\alpha), \alpha)}{\partial \psi^2}, \quad j = 1, 2$$

где $Ai(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau t - t^3/3) dt$ – функция Эйри; $Ai'(\tau)$ – производная функции Эйри [9].

Неравномерная асимптотика получается из (2.2), если функцию Эйри и ее производную заменить на их разложения при больших значениях аргумента. На фиг. 4 представлена волновая картина корабельных (клиновидных) волн, рассчитанная по (2.2) действительная часть функции $\text{Re} J_3(r, \alpha)$ при глубине залегания источника $H = 0.5$ м. Интеграл $J_2(r, \alpha)$, которому на фиг. 2 соответствует нижняя часть дисперсионной кривой $k_2(\psi)$, исследуется аналогично. На фиг. 5 представлена волновая картина, описываемая функцией $\text{Re} J_2(r, \alpha)$, рассчитанной по формуле, аналогичной (2.2), с той же глубиной залегания источника. В данном случае тангенс угла полураствора волнового клина (клина Кельвина) $\text{tg} A = 0.836$. На фиг. 6 приведена волновая картина поверхностных возмущений, отвечающая сумме двух слагаемых $\text{Re}(J_2(r, \alpha) + J_3(r, \alpha))$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что дальние поля поверхностных возмущений от пульсирующего локализованного источника в потоке тяжелой жидкости бесконечной глубины представляют собой систему волн двух типов: кольцевых и клиновидных (корабельных). Нестационарность амплитуды источника возмущений приводит к появлению кольцевых волн, расходящихся по поверхности жидкости непосредственно от источника.

Вклад в полное поверхностное возмущение вносят в данном случае две клиновидные (корабельные) волны, каждая из которых заключена внутри соответствующего клина Кельвина. Построенные асимптотические решения позволяют описывать дальние поля поверхностных возмущений от локализованного нестационарного источника как вне, так и внутри соответствующих волновых клиньев. Полученные асимптотики дальних полей поверхностных волновых возмущений дают возможность эффективно рассчитывать основные характеристики волновых полей и, кроме того, качественно анализировать полученные решения, что важно для правильной постановки математических моделей волновой динамики поверхностных возмущений реальных природных сред.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00466).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поверхностные и внутренние волны в арктических морях / Под ред. И.В. Лавренова и Е.Г. Морозова. СПб.: Гидрометеиздат, 2002. 364 с.
2. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
3. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
4. Pedlosky J. Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin–Heidelberg: Springer, 2003. 260 p.
5. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. М.: Наука, 2010. 470 с.
6. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
7. Dobrokhotov S. Yu., Lozhnikov D.A., Vargas C.A. Asymptotics of waves on the shallow water generated by spatially-localized sources and trapped by underwater ridges // Russ. J. Math. Phys. 2013. V. 20. № 1. P. 11–24.
8. Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Владимиров Ю.В. Равномерные асимптотики дальних полей поверхностных возмущений от источника в тяжелой жидкости бесконечной глубины // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 5. С. 104–111.
9. Borovikov V.A. Uniform stationary phase method // IEEE waves. Ser. 40. London, 1984. 233 p.