

УДК 532.59:534.1

© 2017 г. В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров

## ВНУТРЕННИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ПУЛЬСИРУЮЩИМ ИСТОЧНИКОМ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассматривается задача о поле внутренних гравитационных волн от пульсирующего точечного источника возмущений в потоке стратифицированной среды конечной глубины при горизонтальной скорости источника  $V$ , меньшей максимального значения групповой скорости внутренних гравитационных волн  $c$ , в отличие от ранее рассмотренного случая  $V > c$ . Построенные асимптотические решения позволяют описать амплитудно-фазовые характеристики отдельных мод, составляющих полное поле внутренних гравитационных волн. Возбуждаемые поля состоят из волн двух типов: кольцевых и клиновидных. Рассмотрены особенности модовой структуры возбуждаемых полей в зависимости от параметров стратифицированной среды и характеристик источника возмущений.

Волновые движения в морской среде могут возникать как вследствие естественных причин, так и порождаться обтеканием искусственных препятствий, например, погруженных частей платформ, подводных трубопроводов, иных сложных гидротехнических сооружений [1–6]. Основные результаты решений задач о генерации внутренних гравитационных волн представлены в основном в самой общей интегральной форме, и их трудно проанализировать из-за сложных подынтегральных выражений. В этом случае общие интегральные решения требуют разработки асимптотических методов их анализа и получения достаточно простых аналитических выражений, допускающих их качественный анализ и проведение экспресс-оценок решений [1, 2, 7]. Обычно предмет рассмотрения – первая волновая мода, так как она, как правило, вносит основной вклад в полное волновое поле [3–5], поэтому представляют интерес варианты генерации волн, при которых существенный вклад в полное поле могут вносить моды, отличные от первой.

Была рассмотрена задача о генерации внутренних волн пульсирующим источником, движущимся со скоростью, превышающей максимальную групповую скорость внутренних волн  $c$ , и для первой волновой моды получены асимптотические представления в дальней зоне [8]. Цель настоящей работы – построение решений, описывающих особенности амплитудно-фазовой структуры различных волновых мод дальних полей внутренних гравитационных волн, возбуждаемых пульсирующим источником возмущений, движущимся в слое стратифицированной среды конечной толщины со скоростью, меньшей  $c$ .

**1. Постановка задачи и интегральные формы решений.** Рассматривается задача о дальних полях внутренних гравитационных волн, возникающих при обтекании точечного гармонически пульсирующего источника возмущений мощности  $Q = q \exp(i\omega t)$ ,  $q = \text{const}$  потоком невязкой стратифицированной среды в горизонтальном слое толщины  $H$ . Источник движется с постоянной скоростью  $V$  в горизонтальном направлении оси  $x$ , ось  $z$  направлена вверх, глубина залегания источника  $-z_0$ . Рассматривается установившийся

режим волновых колебаний. В приближении Буссинеска имеем следующее уравнение, например, для вертикального смещения изопикн  $\eta(x, y, z)$  (линий равной плотности с той же временной гармонической зависимостью) [8]

$$\left(i\omega + V \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Delta\eta + N^2 \Delta_2 \eta = Q \left(i\omega + V \frac{\partial}{\partial x}\right) \delta(x) \delta(y) \frac{\partial \delta(z - z_0)}{\partial z_0}$$

$$\Delta = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad N^2 = -\frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz}$$
(1.1)

где  $N^2$  – квадрат частоты Брента–Вяйсяля, которая далее предполагается постоянной, что равносильно рассмотрению частного случая – экспоненциального убывания невозмущенной плотности среды  $\rho_0(z)$  по глубине,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака.

Использованное приближение Буссинеска означает, что величина  $N^2 H / g$  должна быть много меньше единицы, что хорошо выполняется для реальных океанологических условий [1, 2, 9]. Предполагается также, что вертикальная компонента скорости  $w(x, y, z)$  равна нулю на поверхности  $z = 0$  – приближение “твердой крышки”, что упрощает выкладки и отфильтровывает поверхностные волны. Оно общепотребительно при изучении распространения внутренних гравитационных волн в морской среде, и ошибка его применения для реальных гидрологических параметров составляет несколько процентов [1, 2, 10]. Для Арктического бассейна это приближение и условие постоянства частоты Брента–Вяйсяля – одни из базовых в реальных океанологических и гидрофизических расчетах [9, 11, 12].

Функция  $\eta(x, y, z)$  связана с вертикальной компонентой скорости  $w(x, y, z)$  соотношением [8]

$$w(x, y, z) = \left(i\omega + V \frac{\partial}{\partial x}\right) \eta(x, y, z)$$

В качестве граничных условий используется приближение “твердой крышки” на поверхности и условие непротекания на дне

$$\eta = 0 \quad \text{при } z = 0, -H$$
(1.2)

В безразмерных координатах и переменных

$$x^* = x\pi / H, \quad y^* = y\pi / H, \quad z^* = z\pi / H, \quad \eta^* = \eta H^2 V / (q\pi^2), \quad \omega^* = \omega / N, \quad t^* = tN$$

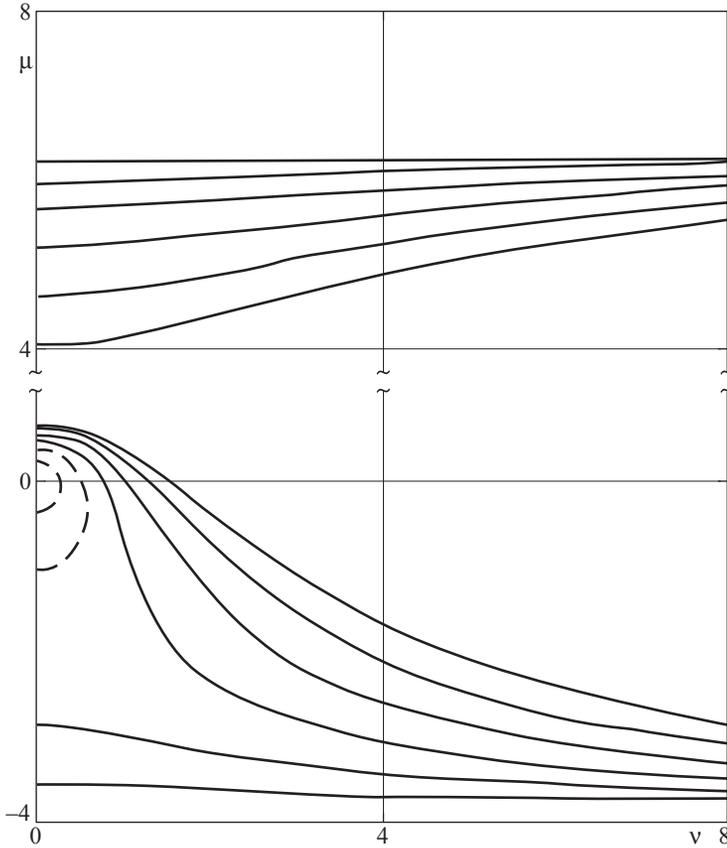
уравнение (1.1) и граничные условия (1.2) переписутся следующим образом (звездочка далее опускается):

$$\left(i\omega + M \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Delta\eta + \Delta_2 \eta = \left(i\omega + M \frac{\partial}{\partial x}\right) \delta(x) \delta(y) \frac{\partial \delta(z - z_0)}{\partial z_0}, \quad M = \frac{V}{c}$$
(1.3)

$$\eta = 0 \quad \text{при } z = 0, -\pi$$

где  $c = NH / \pi$  – максимальное значение групповой скорости внутренних гравитационных волн в слое стратифицированной среды толщины  $H$  [3–5].

Был рассмотрен случай  $M > 1$  и показано, что вдали от пульсирующего источника возмущений возбуждаемые поля представляют собой систему клиновидных волн, заключенных внутри соответствующих волновых фронтов [8]. Ниже рассматривается случай  $M < 1$  и  $\omega < 1$ . Аналогично предыдущему решению задачи ищется в виде интегралов



Фиг. 1

Фурье и представляется в виде суммы вертикальных мод. С учетом гармонической зависимости от времени точное решение запишем в виде

$$\eta(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(x, y, t) \cos nz_0 \sin nz, \quad \eta_n(x, y, t) = \begin{cases} J_n^1 + J_n^2 + J_n^4, & x > 0 \\ -J_n^3, & x < 0 \end{cases}$$

$$J_n^j = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_n^j(\nu) \exp(-i(\mu_n^j x + \nu y - \omega t)) d\nu$$

$$f_n^j(\nu) = \frac{M}{2} \frac{(\mu_n^j M - \omega)^2}{\mu_n^j \omega + M\nu^2 + \mu_n^j (\mu_n^j M - \omega)^3}, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Дисперсионное соотношение  $\mu_n^j = \mu_n^j(\nu)$ , связывающее горизонтальные компоненты  $\mu$  и  $\nu$  волнового вектора  $k$  ( $k^2 = (\mu_n^j)^2 + \nu^2$ ), имеет вид

$$F_n(\mu, \nu, \omega, M) \equiv (\mu_n^j M - \omega)^2 - k^2(k^2 + n^2)^{-2} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \tag{1.4}$$

и это уравнение при  $M < 1$  может иметь от двух до четырех действительных корней, которым соответствуют дисперсионные кривые (ДК) двух типов: 1) замкнутая кривая, которую удобно разбить на две части:  $\mu_n^2(v)$  (верхняя ветвь) и  $\mu_n^3(v)$  (нижняя ветвь); 2) две незамкнутые кривые:  $\mu_n^1(v)$  (верхняя ветвь) и  $\mu_n^4(v)$  (нижняя ветвь). Замкнутым кривым отвечают кольцевые волны, а незамкнутым – клиновидные волны (волны внутри клина Кельвина) [8].

На фиг. 1 представлены ДК первых шести клиновидных (сплошные линии) и двух кольцевых (штриховые линии) волновых мод. Вследствие симметрии относительно оси  $v = 0$  показана лишь область  $v \geq 0$ . Здесь и далее все результаты численных расчетов приведены для значений  $M = 0.2$  и  $\omega = 0.25$ . Нумерация клиновидных мод идет от периферии к центру, а кольцевых мод – от центра к периферии. В частности, для указанных значений  $M$  и  $\omega$  кольцевых мод – только две, поэтому при  $n > 2$  все слагаемые  $J_n^2$  и  $J_n^3$  равны нулю.

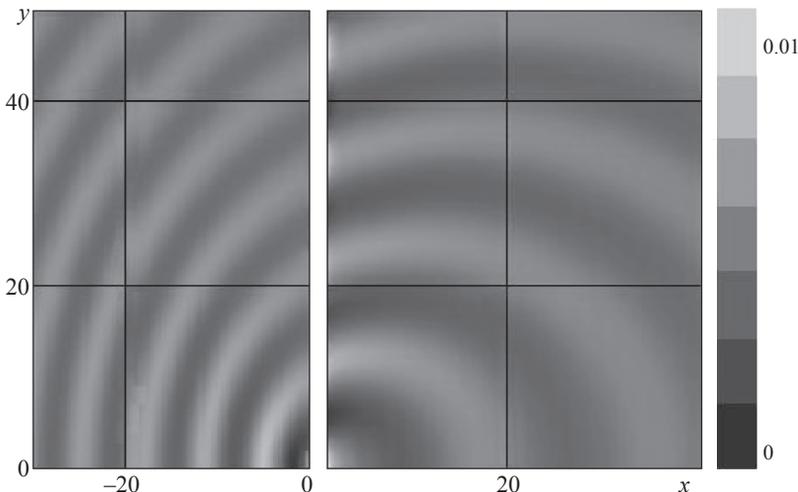
**2. Асимптотики решений.** Асимптотики слагаемых  $J_n^2(x > 0)$  и  $J_n^3(x < 0)$ , описывающих поведение кольцевых волн вдали от пульсирующего источника возмущений при больших значениях  $|x|$ , определяются методом стационарной фазы и имеют вид

$$J_n^j = -\frac{f_n^j(v_n)\cos(\mu_n^j(v_n)x + v_n y - \omega t - \pi/4)}{\sqrt{-2\pi\chi_n^j(v_n)|x|}} + O(|x|^{-1}), \quad j = 2, 3 \tag{2.1}$$

$$\rho = \frac{y}{x}, \quad \chi_n^j(v) = \frac{d^2\mu_n^j(v)}{dv^2}.$$

где  $v_n = v_n(\rho)$  – корни уравнения  $\frac{d\mu_n^j(v)}{dv} = -\rho$ .

На фиг. 2 представлены результаты расчетов при  $|x| > 1$  по формуле (2.1). Вследствие симметрии относительно оси  $y = 0$  показана лишь область  $y \geq 0$ . Видно, что кольцевые волны более вытянуты в положительном направлении оси  $x$ .



Фиг. 2

Волнам второго типа – клиновидным волнам – соответствуют незамкнутые ДК  $\mu_n^j(v)$ , их поведение полностью определяется интегралами  $J_n^j$  ( $j = 1, 4$ ). Границы волновых клиньев определяются равенствами

$$y = \pm \mu_n^j(v_n^*)x, \quad j = 1, 4$$

где  $v_n^*$  – корни уравнения  $\frac{d^2 \mu_n^j(v)}{dv^2} = 0$ .

Равномерные асимптотики, например, интегралов  $J_n^1$  (асимптотики  $J_n^4$  строятся аналогично) на больших расстояниях от движущегося пульсирующего источника возмущений имеют вид

$$J_n^1 = \frac{T_n^+}{x^{1/3}} \text{Ai}(x^{2/3} \sigma_n) \cos(a_n x - \omega t) + \frac{T_n^-}{x^{2/3} \sqrt{\sigma_n}} \text{Ai}'(x^{2/3} \sigma_n) \sin(a_n x - \omega t)$$

$$T_n^\pm = T_n^\pm(\rho) = \frac{1}{2} \left( f_n^1(v_n^2) \sqrt{\frac{-2\sqrt{\sigma_n}}{\theta_n(v_n^2, \rho)}} \pm f_n^1(v_n^1) \sqrt{\frac{2\sqrt{\sigma_n}}{\theta_n(v_n^1, \rho)}} \right)$$

$$\sigma_n = \sigma_n(\rho) = \left( \frac{3}{4} (S_n(v_n^2, \rho) - S_n(v_n^1, \rho)) \right)^{2/3}$$

$$a_n = a_n(\rho) = \frac{1}{2} (S_n(v_n^1, \rho) + S_n(v_n^2, \rho))$$

$$S_n = S_n(v, \rho) = \mu_n^1(v) + \rho v, \quad \rho = y/x, \quad \theta_n(v, \rho) = \partial^2 S_n / \partial v^2$$

$$\text{Ai}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau t - t^3/3) dt$$

$v_n^1 = v_n^1(\rho)$  и  $v_n^2 = v_n^2(\rho)$  – корни уравнения  $\partial S_n / \partial v = 0$ , при этом  $|v_n^2| < |v_n^1|$ ;  $\text{Ai}(\tau)$  – функция Эйри.

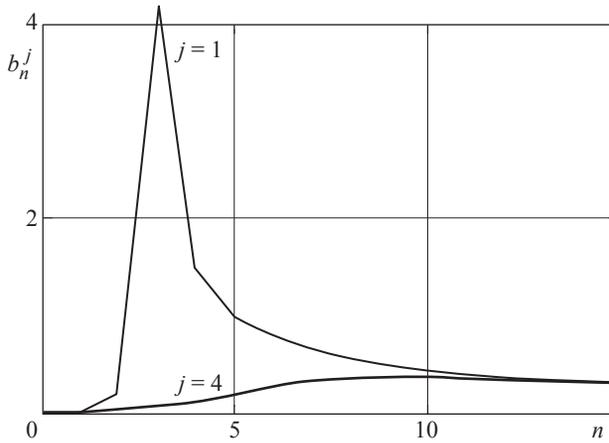
Волновые фронты клиновидных волн – прямые линии

$$y = \pm b_n^j x, \quad b_n^j = \max \frac{d\mu_n^j(v)}{dv}, \quad j = 1, 4$$

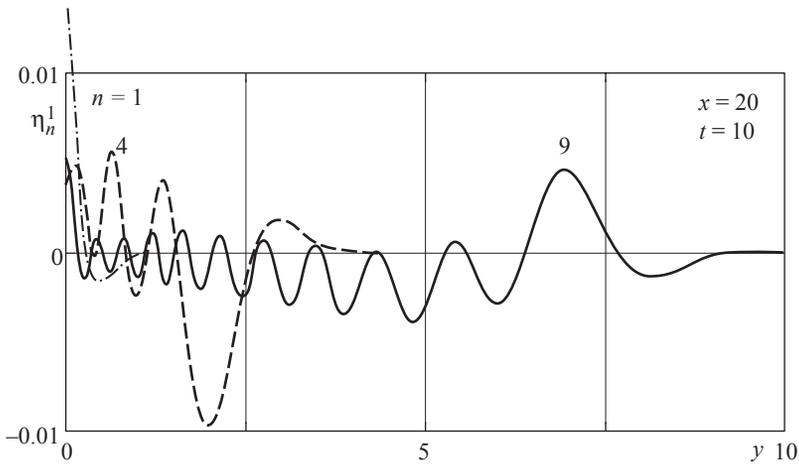
где  $b_n^j$  – тангенс угла полураствора соответствующего волнового клина.

На фиг. 3 приведены распределения  $b_n^1$  и  $b_n^4$  в зависимости от номера моды  $n$ . Видно, что для клиновидных мод, отвечающих верхним (нижним) ветвям ДК  $\mu_n^1(v)$  ( $\mu_n^4(v)$ ), максимальный угол полураствора – у девятой моды:  $b_9^1 = 0.37$  (у третьей моды:  $b_3^4 = 4.19$ ). Действительно, как непосредственно видно из фиг. 1, ДК  $\mu_3^4(v)$  – первая из всех ДК  $\mu_n^4(v)$ , которая огибает ДК кольцевых мод не снизу, а сверху. Для больших значений  $n$  (высшие волновые моды) величины  $b_n^1$  и  $b_n^4$  практически совпадают.

На фиг. 4 представлены результаты расчетов трех клиновидных волновых мод  $\eta_n^1$  ( $n = 1, 4, 9$ ) при фиксированных значениях  $x = 20$  и  $t = 10$ . На фиг. 5 и 6 представлены результаты расчетов фазовых картин волновых мод с шагом  $2\pi$ : в верхней (нижней) части фиг. 5 – девятая клиновидная мода  $J_9^4$  ( $J_9^1$ ), отвечающая нижней (верхней) ветви



Фиг. 3



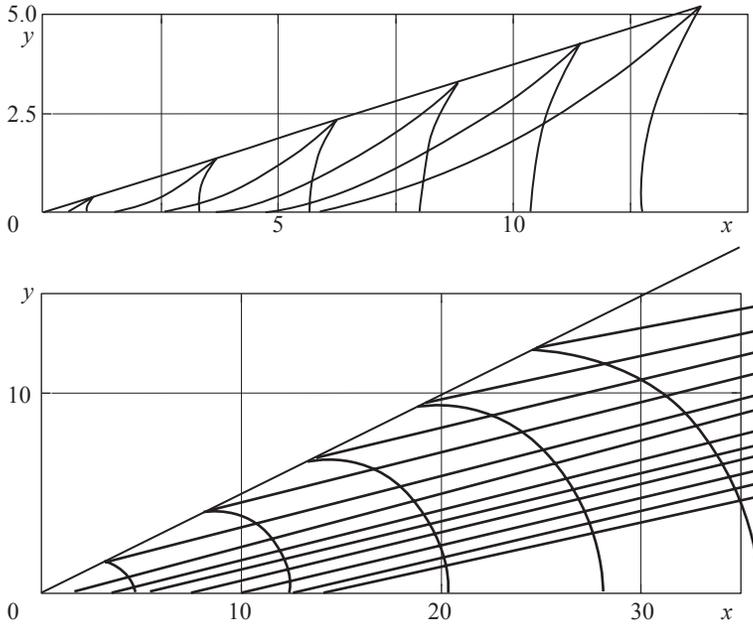
Фиг. 4

ДК, на фиг. 6 – вторая кольцевая мода, описываемая слагаемыми  $J_2^2$  и  $J_2^3$ . Вследствие симметрии относительно оси  $y = 0$  показана лишь область  $y \geq 0$ .

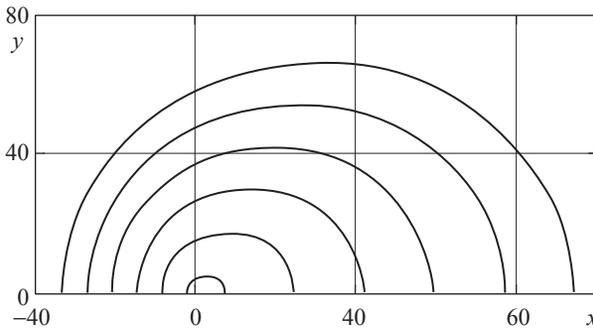
**3. Модовая структура волнового поля.** Далее необходимо определить, при каких значениях параметров  $\omega$  и  $M$ , характеризующих частоту пульсаций и скорость движения источника возмущений, для моды с произвольным номером  $n$  возникают кольцевые волны. Можно показать, что для этого достаточно при  $\nu = 0$  найти такую зависимость  $\omega_n(M)$ , при которой уравнение (1.4) будет иметь ровно три корня. Для того чтобы определить эту зависимость, достаточно исключить из системы уравнений

$$F_n(\mu, 0, \omega, M) = 0, \quad \frac{\partial F_n(\mu, 0, \omega, M)}{\partial \mu} = 0, \quad \mu < 0$$

переменную  $\mu$ . В результате можно получить:  $\omega_n(M) = (1 - (Mn)^{2/3})^{3/2}$ . Тогда, если  $M > 1/n$ , то ни при каких значениях  $\omega$  кольцевых волн для  $n$ -й моды не существует.



Фиг. 5



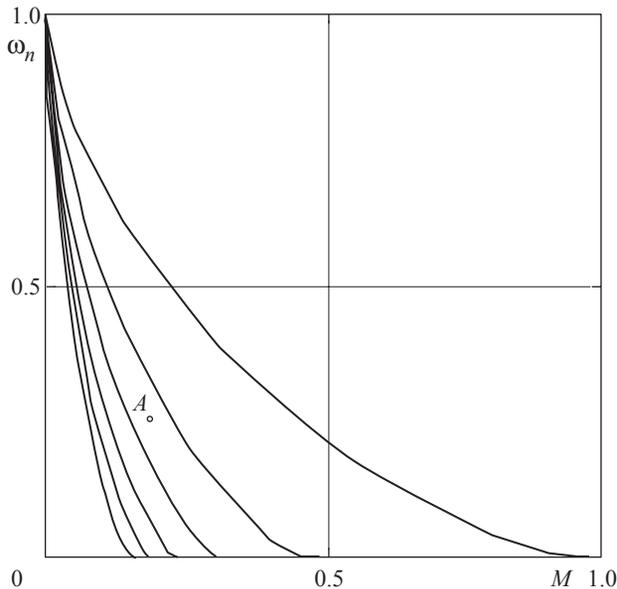
Фиг. 6

Если  $M < 1/n$ , то при  $\omega > \omega_n(M)$  кольцевых волн нет, а при  $\omega < \omega_n(M)$  они существуют. Отсюда, в частности, следует, что, в отличие от клиновидных волн, при любых значениях  $M$  имеется лишь конечное число мод, для которых существуют кольцевые волны, причем

$$1/(n+1) < M < 1/n$$

где  $n$  – максимально возможное число мод, для которых существуют кольцевые волны при заданном значении  $M$ .

На фиг. 7 показаны зависимости  $\omega_n(M)$  для первых шести волновых мод, нумерация мод идет справа налево. Точка  $A$  соответствует значениям  $M$  и  $\omega$ , при которых проводились численные расчеты, откуда видно, что в этом случае существуют только две кольцевые волны.



Фиг. 7

Качественная картина волновых полей вдали от пульсирующего источника возмущений существенно усложняется по сравнению со случаем генерации волн движущимся стационарным источником возмущений, когда в фиксированную точку наблюдения (ФТН) последовательно приходят волновые фронты отдельных мод, начиная с первой [3–5]. Во-первых, для некоторых параметров движения источника (скорость, частота пульсации) в ФТН могут приходить вначале кольцевые волны, при этом количество приходящих кольцевых волн всегда конечно. Во-вторых, в отличие от случая возбуждения волновых полей неп пульсирующим источником возмущений, в ФТН приходит не фронт первой моды, потом второй и так далее мод, а вначале может приходить фронт волновой моды, отличной от первой и имеющей наибольший угол полураствора клина Кельвина. Номер волновой моды, первой достигающей ФТН, зависит от скорости движения источника возмущений, частоты его пульсации и параметров стратифицированной среды. Число клиновидных волновых мод с углом полураствора клина Кельвина, ббльшим угла полураствора клина Кельвина первой моды, конечно. Отметим в заключение, что для больших номеров мод угол полураствора волнового клина Кельвина уменьшается с номером моды так же, как и для случаев генерации волн неп пульсирующим источником возмущений [3–5].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Pedlosky J.* Waves in the Ocean and Atmosphere: Introduction to Wave Dynamics. В. etc: Springer, 2010. 260 p.
2. *Sutherland B.R.* Internal Gravity Waves. Cambridge: Univ. Press, 2010. 394 p.
3. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. М.: Наука, 2010. 470 с.
4. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Wave Dynamics of Stratified Mediums. М.: Nauka, 2012. 584 p.

5. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
6. Abdilghanie A.M., Diamesis P.J. The internal gravity wave field emitted by a stably stratified turbulent wake // J. Fluid Mech. 2013. V. 720. P. 104–139.
7. Rees T., Lamb K.G., Poulin F.J. Asymptotic analysis of the forces internal gravity waves equation // SIAM J. Appl. Math. 2012. V. 72. № 4. P. 1041–1060.
8. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Внутренние гравитационные волны, возбуждаемые пульсирующим источником возмущений // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 6. С. 26–34.
9. Поверхностные и внутренние волны в арктических морях / Под ред. Морозова Е.Г. СПб.: Гидрометеоздат, 2002. 364 с.
10. Рындина В.В. Собственные частоты внутренних волн в жидкости и частота Брента–Вайсяля. Ростов-на-Дону: Изд-во ЦВВР, 2007. 128 с.
11. Писарев С.В. Низкочастотные внутренние волны у кромки шельфа Арктического бассейна // Океанология. 1996. Т. 36. № 6. С. 819–826.
12. Труды XIII Всероссийской конференции “Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики” / Под ред. Белова С.П. и др. СПб., 2016. 516 с.

Институт проблем механики РАН  
Москва  
e-mail: internalwave@mail.ru  
vladimyura@yandex.ru

Поступила в редакцию  
13.X.2016