

УДК 532.59:534.1

## ВНУТРЕННИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ДВИЖУЩИМСЯ С ДОКРИТИЧЕСКОЙ СКОРОСТЬЮ ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ИСТОЧНИКОМ ВОЗМУЩЕНИЙ

В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва, Россия  
E-mails: internalwave@mail.ru, vladimyura@yandex.ru

Рассмотрена задача о построении асимптотик дальних полей внутренних гравитационных волн, генерируемых осциллирующим локализованным источником возмущений, движущимся в потоке стратифицированной среды конечной глубины. Скорость источника возмущений не превышает максимальной групповой скорости отдельной волновой моды. Волновая картина состоит из волн двух типов: кольцевых и клиновидных. Получены решения, описывающие асимптотики кольцевых волн, которые выражаются через функцию Ханкеля. Асимптотики клиновидных волн выражаются через функцию Эйри и ее производную.

**Ключевые слова:** стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, дальние поля, равномерная асимптотика, волновой фронт.

DOI: 10.15372/PMTF20170605

**Введение.** Поля внутренних гравитационных волн в природных (океан, атмосфера Земли) и искусственных стратифицированных средах генерируются источниками возмущений различного происхождения: природными (движущийся тайфун, обтекание неровностей рельефа дна океана и поверхности суши) и антропогенными (морские технологические конструкции, схлопывание области турбулентного перемешивания, подводные взрывы) [1–6]. Существующие подходы к описанию волновой картины основаны на представлении волновых полей в виде интегралов Фурье и анализе их асимптотики методом стационарной фазы или на построении огибающих волновых фронтов с использованием кинематической теории диспергирующих волн [4, 5, 7, 8]. Как правило, на основе кинематической теории удается сформулировать аналитическое представление только для фазовых поверхностей (линий) [9].

Целью настоящей работы является построение асимптотических решений, описывающих амплитудно-фазовые характеристики дальних полей внутренних гравитационных волн, возбуждаемых осциллирующим источником возмущений, движущимся в стратифицированной среде конечной толщины. Волновые движения подобного типа, возникающие при суперпозиции поступательного и колебательного движения тела, погруженного в стратифицированную жидкость, рассматривались в работах [10–12].

---

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00466).

© Булатов В. В., Владимиров Ю. В., 2017

**Постановка задачи и интегральные формы решений.** В данной работе рассматривается задача о дальних полях внутренних гравитационных волн, возникающих при обтекании точечного источника возмущений с мощностью  $Q$  потоком стратифицированной среды толщиной  $H$ . Предполагается, что зависимость мощности источника от времени является гармонической:  $Q = q \exp(i\omega t)$ . Источник движется со скоростью  $V$  в горизонтальном направлении вдоль оси  $x$ , ось  $z$  направлена вверх, глубина залегания источника равна  $-z_0$ . Рассматривается установившийся режим волновых колебаний. В линейной постановке с учетом приближения Буссинеска для вертикального смещения изолиний плотности с одной и той же временной зависимостью запишем уравнение [3–5, 13]

$$\begin{aligned} \left(i\omega + V \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Delta\eta + N^2(z) \Delta_2\eta &= Q \left(i\omega + V \frac{\partial}{\partial x}\right) \delta(x)\delta(y) \frac{\partial\delta(z - z_0)}{\partial z_0}, \\ \Delta &= \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $N^2(z)$  — частота Брента — Вайсяля, которая далее полагается постоянной:

$$N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz},$$

$\rho_0(z)$  — невозмущенная плотность среды;  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака. Функция  $\eta(x, y, z)$  связана с вертикальной компонентой скорости  $w(x, y, z)$  соотношением [3–5, 13]

$$w(x, y, z) = \left(i\omega + V \frac{\partial}{\partial x}\right) \eta(x, y, z).$$

В качестве граничных условий используется условие “твердой крышки”

$$z = 0, \quad z = -H: \quad \eta = 0. \quad (2)$$

В безразмерных переменных

$$x^* = x\pi/H, \quad y^* = y\pi/H, \quad z^* = z\pi/H, \quad \eta^* = \eta H^2 V / (q\pi^2), \quad \omega^* = \omega/N, \quad t^* = tN$$

уравнение (1) и граничные условия (2) записываются следующим образом (индекс “\*” далее опускается):

$$\begin{aligned} \left(i\omega + M \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Delta\eta + \Delta_2\eta &= \left(i\omega + M \frac{\partial}{\partial x}\right) \delta(x)\delta(y)\delta'(z - z_0), \\ z = 0, \quad z = -\pi: \quad \eta &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $M = V/c$  — число Маха;  $c = NH/\pi$  — максимальное значение групповой скорости внутренних гравитационных волн в слое стратифицированной среды толщиной  $H$  [3–5]. В [13] рассмотрен случай  $M > 1$  и показано, что вдали от осциллирующего источника возмущений возбуждаемые поля представляют собой систему клиновидных волн, заключенных внутри соответствующих волновых фронтов. В настоящей работе рассматривается случай  $M < 1$ .

Аналогично [13] решение задачи (3) будем искать в форме интеграла Фурье

$$\eta(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu, \nu, z) e^{-i(\mu x + \nu y)} d\mu.$$

Тогда для определения функции  $\varphi(\mu, \nu, z)$  имеем следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 \left( \frac{1}{(\omega - \mu M)^2} - 1 \right) \varphi = \frac{i}{\omega - \mu M} \frac{\partial \delta(z - z_0)}{\partial z_0},$$

$$z = 0, \quad z = -\pi: \quad \varphi = 0 \quad (4)$$

( $k^2 = \mu^2 + \nu^2$ ).

Решение задачи (4) представляется в виде суммы вертикальных мод

$$\varphi(\mu, \nu, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\mu, \nu, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\mu, \nu) \cos(nz_0) \sin(nz),$$

$$B_n(\mu, \nu) = \frac{2ni}{\pi(\omega - \mu M)} \frac{1}{k^2((\omega - \mu M)^{-2} - 1) - n^2},$$

т. е. в виде ряда по собственным функциям однородной краевой задачи (4). В результате решение задачи (3) имеет вид

$$\eta(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(x, y) \cos(nz_0) \sin(nz),$$

$$\eta_n(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\mu, \nu) e^{-i(\mu x + \nu y)} d\mu. \quad (5)$$

Приравнивая к нулю знаменатель в (5), получаем дисперсионное соотношение, связывающее горизонтальную  $\mu$  и вертикальную  $\nu$  компоненты волнового вектора  $k$ :

$$k^2 \left( \frac{1}{(\omega - \mu M)^2} - 1 \right) = n^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Рассмотрим первую волновую моду ( $n = 1$ ) для случая  $\omega < 1$ . При  $M < 1$  дисперсионное уравнение (6) имеет от двух до четырех действительных корней. На рис. 1 приведены дисперсионные кривые двух типов: кривая первого типа — замкнутая кривая (на рис. 1 она состоит из двух частей  $\mu_2(\nu)$ ,  $\mu_3(\nu)$ ), кривые второго типа — две незамкнутые кривые  $\mu_1(\nu)$ ,  $\mu_4(\nu)$ . Здесь и далее все результаты численных расчетов приведены для значений

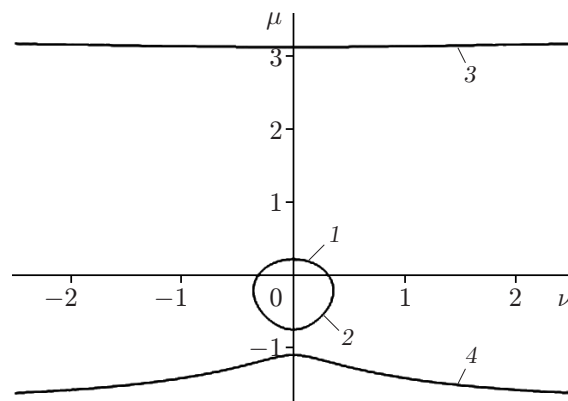


Рис. 1. Дисперсионные кривые первого (1, 2) и второго (3, 4) типов:  
1 —  $\mu_2(\nu)$ , 2 —  $\mu_3(\nu)$ , 3 —  $\mu_1(\nu)$ , 4 —  $\mu_4(\nu)$

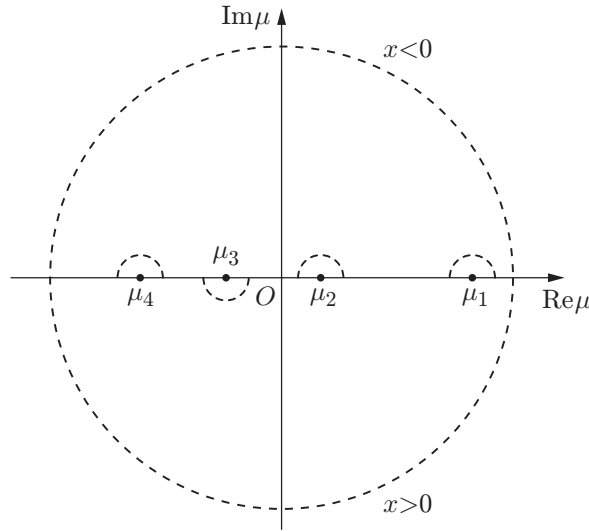


Рис. 2. Контур интегрирования и пути обхода полюсов

$M = 0,4$ ,  $\omega = 0,3$ . Проблема обхода полюсов  $\mu_i(\nu)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), находящихся на действительной оси, при интегрировании по переменной  $\mu$  решается методом возмущений. Заменяя в (6)  $\omega$  на  $\omega - i\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ), получаем возмущенные решения  $\mu_i(\nu) - i\varepsilon r_i(\nu)$ , где

$$r_i(\nu) = \left( M - \frac{\mu_i(\nu)}{(\mu_i(\nu) M - \omega)(\mu_i^2(\nu) + \nu^2 + 1)^2} \right)^{-1}.$$

Можно показать, что  $r_i(\nu) > 0$  ( $i = 1, 2, 4$ ),  $r_3(\nu) < 0$  для всех  $\nu$ , поэтому полюсы  $\mu_i(\nu)$  ( $i = 1, 2, 4$ ) обходятся сверху, а полюс  $\mu_3(\nu)$  — снизу. При интегрировании по переменной  $\mu$  контур интегрирования, представленный на рис. 2 (полюсам  $\mu_i(\nu)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) соответствует значение  $\nu = 0$ ), замыкается вниз при  $x > 0$  и вверх при  $x < 0$ . Тогда точное решение (с учетом гармонической зависимости  $\eta$  от времени) имеет вид

$$\eta(x, y, t) = \begin{cases} J_1 + J_2 + J_4, & x > 0, \\ -J_3, & x < 0, \end{cases}$$

где

$$J_j = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_j(\nu) e^{-i(\mu_j(\nu)x + \nu y - \omega t)} d\nu,$$

$$f_j(\nu) = \frac{M}{2} \frac{(\mu_i M - \omega)^2}{\mu_j(\nu)\omega + M\nu^2 + \mu_j(\nu)(\mu_j(\nu) M - \omega)^3}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

**Построение асимптотик для кольцевых волн.** Рассмотрим сначала кольцевые волны — волны первого типа, соответствующие замкнутой дисперсионной кривой. Поведение волн этого типа определяется интегралами  $J_2$  при  $x > 0$  и  $J_3$  при  $x < 0$ . Исследуется интеграл  $J_2$  (интеграл  $J_3$  исследуется аналогично). Введем обозначение для фазы  $\Phi_2 = \mu_2(\nu)x + \nu y - \omega t$ . Далее используем условие стационарности фазы  $\mu'_2(\nu) = -y/x$ . При  $x > 0$  этим соотношениям удовлетворяет семейство линий постоянной фазы  $\Phi_2$  с параметром  $\nu$ :

$$x = \frac{\Phi_2 + \omega t}{\mu_2(\nu) - \nu\mu'_2(\nu)}, \quad y = -\frac{\mu'_2(\nu)(\Phi_2 + \omega t)}{\mu_2(\nu) - \nu\mu'_2(\nu)}.$$

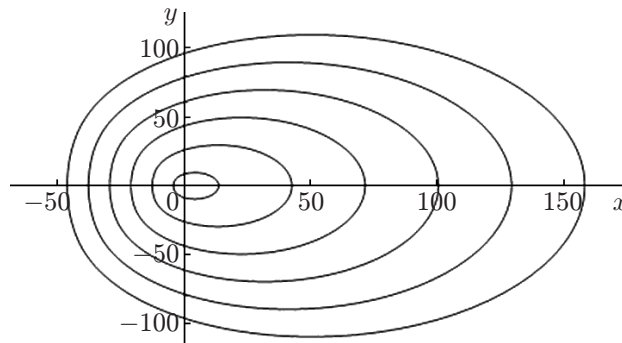


Рис. 3. Линии постоянной фазы для волн первого типа (кольцевых волн)

При  $x < 0$  аналогичное семейство линий постоянной фазы описывается этими же уравнениями с фазой  $\Phi_3 = \mu_3(\nu)x + \nu y - \omega t$ .

На рис. 3 показаны линии постоянной фазы, образующие замкнутые кривые, при фиксированном значении  $t$  и  $\Phi_2 = \Phi_3 = 2\pi k$ ,  $k = 0, 1, \dots, 5$ . Обозначим через  $\nu_*$  абсциссу крайней правой точки замкнутой кривой на рис. 1, в которой  $\mu_2(\nu_*) = \mu_3(\nu_*)$  (точка с абсциссой  $-\nu_*$  является крайней левой точкой). Представим интеграл  $J_2$  в виде суммы двух слагаемых

$$J_2 = I_0 + I_1, \quad (7)$$

где

$$I_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\nu_*}^{\nu_*} f_2(\nu) e^{-i(\mu_2(\nu)x + \nu y - \omega t)} d\nu, \quad I_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\nu_*}^{\infty} f_2(\nu) e^{-i(\mu_2(\nu)x - \omega t)} \cos(\nu y) d\nu.$$

Для функции  $\mu_2(\nu)$  и знаменателя в выражении для функции  $f_2(\nu)$  точка  $\nu_*$  является точкой ветвления второго порядка. Функция  $\mu_2(\nu)$  аналитически продолжается в область  $|\nu| > \nu_*$  таким образом, что мнимая часть  $\mu_2(\nu)$  является отрицательной. Следовательно, в окрестности точки  $\nu_*$  функции  $\mu_2(\nu)$  и  $f_2(\nu)$  можно представить в виде  $\mu_2(\nu) = \alpha + \beta\sqrt{\nu_* - \nu} + O(\nu_* - \nu)$ ,  $f_2(\nu) = (1/\gamma)\sqrt{\nu_* - \nu} + O(1)$ . Тогда асимптотика интеграла  $I_1$  при больших значениях  $x$  вычисляется путем интегрирования по частям:

$$I_1 = -\frac{2 \sin(\alpha x - \omega t) \cos(\nu_* y)}{\pi \beta \gamma x} + O(x^{-2}). \quad (8)$$

Асимптотика интеграла  $I_0$  вычисляется методом стационарной фазы:

$$I_0 = -\frac{f_2(\nu(\rho)) \cos(\mu_2(\nu(\rho))x + \nu(\rho)y - \omega t - \pi/4)}{\sqrt{-2\pi\mu_2''(\nu(\rho))x}} + O(x^{-1}). \quad (9)$$

Здесь  $\nu(\rho)$  — корень уравнения  $\mu_2'(\nu) = -\rho$ ;  $\rho = y/x$ ; остаточный член  $O(x^{-1})$  определяется вкладом в интеграл границ области интегрирования и равен главному члену в разложении (8) с противоположным знаком. Поэтому главный член асимптотики  $J_2$  такой же, как и в (9), но остаточный член имеет вид  $O(x^{-3/2})$ . Функция  $\mu_2'(\nu)$  является взаимно однозначной с областью изменения  $(-\infty, \infty)$ , что существенно упрощает определение обратной функции  $\nu(\rho)$  при действительных значениях  $\rho$  с помощью компьютерных систем типа Mathematica. Асимптотика интеграла  $J_3$  вычисляется аналогично с помощью метода стационарной фазы.

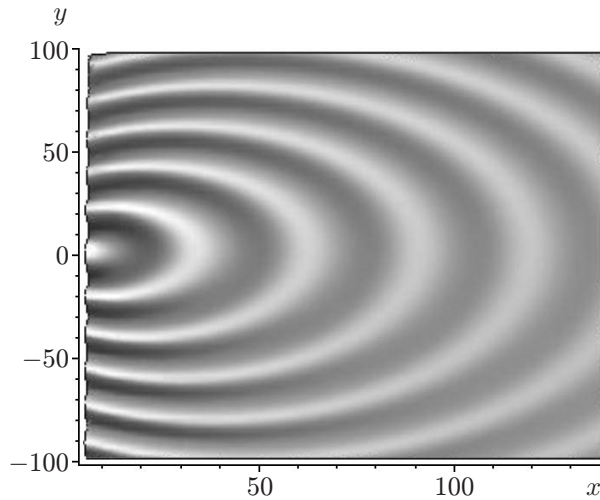


Рис. 4. Кольцевые волны при  $x > 0$

Асимптотика (9) справедлива и при малых  $x$  (даже при  $x = 0$ ). Действительно, при малых  $x$  и фиксированном значении  $y$  (например,  $y > 0$ ) стационарная точка  $\nu_0$  находится вблизи точки  $\nu_*$ :  $\nu_0 = \nu_* - \beta^2/(4\rho^2)$ . Тогда асимптотика (9) принимает вид

$$J_2 = -\frac{\cos(\alpha x + \nu_* y - \omega t - \pi/4)}{\gamma\sqrt{\pi y}}. \tag{10}$$

Таким образом, асимптотика (10) является практически равномерной в области  $x \geq 0$  при больших значениях  $x^2 + y^2$ .

На рис. 4 показана трехмерная картина кольцевых волн, описываемых интегралом  $J_2$  в области  $x \geq 5$ , рассчитанная с помощью метода стационарной фазы (9). Заметим, что при больших значениях  $y$  выражение (10) является действительной частью асимптотики функции

$$F(x, y) = -\frac{\sqrt{\nu_*} e^{-i\alpha x - i\omega t} H_0^{(2)}(\nu_* y)}{\sqrt{2} \gamma}, \tag{11}$$

где  $H_0^{(2)}$  — функция Ханкеля второго рода.

На рис. 5 представлены значения интегралов  $J_2$  и  $J_3$  ( $x < 0$ ) при  $y = 25$ ,  $t = 10$ , рассчитанные по формуле (7) (сплошная линия) и в приближении стационарной фазы (штриховая линия). Видно, что перед источником возмущений волны имеют бóльшую амплитуду и меньшую длину, чем за источником. На рис. 6 представлен интеграл  $J_2$  при  $x = 1$ ,  $t = 10$ , рассчитанный по формуле (7) (сплошная линия) и формуле (11) (штриховая линия).

**Построение асимптотик для клиновидных волн.** Волнам второго типа (клиновидным волнам) соответствуют незамкнутые дисперсионные кривые  $\mu_1(\nu)$ ,  $\mu_4(\nu)$ . Поведение этих волн полностью определяется интегралами  $J_1$  и  $J_4$  соответственно. Далее будет рассматриваться интеграл  $J_4$ . Граница волнового клина определяется равенством  $y = \pm\mu_4(\nu_1)x$ , где  $\nu_1$  — корень уравнения  $\mu_4''(\nu) = 0$ . Равномерные асимптотики интегралов подобного типа построены в [13]. Равномерная асимптотика интеграла  $J_4$  на больших расстояниях от движущегося осциллирующего источника возмущений имеет вид

$$J_4 = \frac{T_+(\rho)}{x^{1/3}} \text{Ai}(x^{2/3}\sigma(\rho)) \cos(a(\rho)x - \omega t) + \frac{T_-(\rho)}{x^{2/3}\sqrt{\sigma(\rho)}} \text{Ai}'(x^{2/3}\sigma(\rho)) \sin(a(\rho)x - \omega t), \tag{12}$$

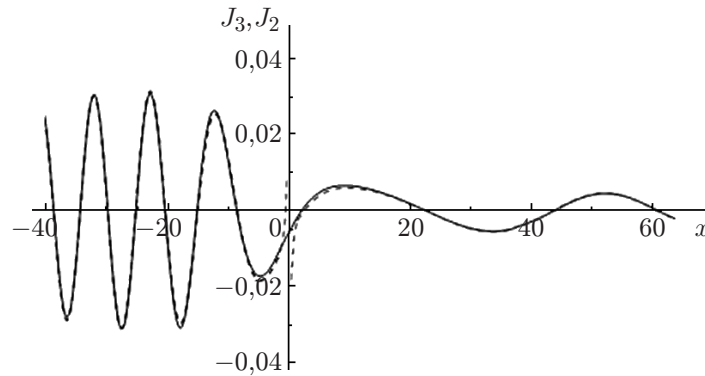


Рис. 5. Значения интегралов  $J_3$  и  $J_2$ :  
сплошная линия — численный расчет, штриховая — асимптотики

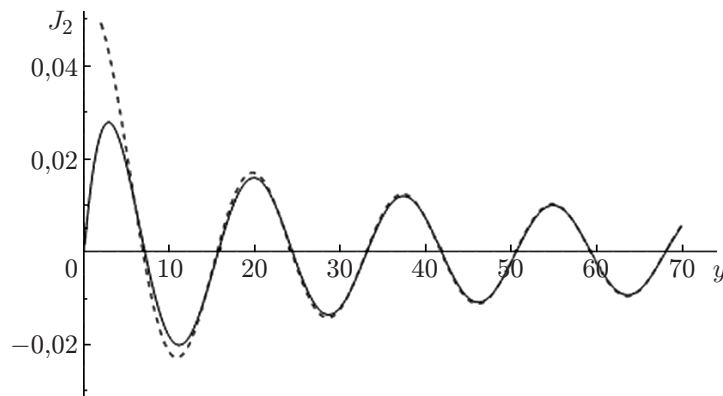


Рис. 6. Значение  $J_2$  (сплошная линия) и приближенное значение  $J_2$ , определенное с помощью функции Ханкеля (штриховая линия)

$$T_{\pm}(\rho) = \frac{1}{2} \left( f_4(\nu_2(\rho)) \sqrt{\frac{-2\sqrt{\sigma(\rho)}}{S''_{\nu\nu}(\nu_2(\rho), \rho)}} \pm f_4(\nu_1(\rho)) \sqrt{\frac{2\sqrt{\sigma(\rho)}}{S''_{\nu\nu}(\nu_1(\rho), \rho)}} \right)$$

$$\sigma(\rho) = \left\{ \left( \frac{3}{4} \right) [S(\nu_2(\rho), r) - S(\nu_1(\rho), r)] \right\}^{2/3}, \quad a(\rho) = [S(\nu_1(\rho), \rho) + S(\nu_2(\rho), \rho)]/2,$$

$$S(\nu, \rho) = \mu_4(\nu) + \rho\nu, \quad \rho = y/x,$$

где  $\nu_1(\rho)$ ,  $\nu_2(\rho)$  — корни уравнения  $S'_{\nu}(\nu, \rho) = 0$ , причем  $|\nu_2(\rho)| < |\nu_1(\rho)|$ ;  $\text{Ai}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\tau t - \frac{t^3}{3}\right) dt$  — функция Эйри;  $\text{Ai}'(\tau)$  — производная функции Эйри. Нерав-

номерная асимптотика, описывающая клиновидные волны в приближении стационарной фазы, может быть получена из равномерной, если в (12) функцию Эйри и ее производную заменить их асимптотиками при больших положительных значениях аргумента [3–5].

**Заключение.** Построенные в работе асимптотические решения позволяют описать амплитудно-фазовые характеристики дальних полей внутренних гравитационных волн, возбуждаемых локализованным осциллирующим источником возмущений, движущимся в потоке стратифицированной среды конечной толщины. Показано, что если скорость источника возмущений не превышает максимальной групповой скорости отдельной волновой моды, то возбуждаемые поля состоят из волн двух типов: кольцевых и клиновидных. Полученные асимптотики дальних полей кольцевых и клиновидных волн позволяют не только

рассчитывать их основные характеристики, но и проводить качественный анализ получаемых решений. Волновые картины этих полей могут наблюдаться при дистанционном зондировании и измерении внутренних гравитационных волн, возбуждаемых различными источниками возмущений в природных и искусственных стратифицированных средах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Pedlosky J.** Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010.
2. **Sutherland B. R.** Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010.
3. **Булатов В. В.** Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах / В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров. М.: Наука, 2010.
4. **Bulatov V. V.** Wave dynamics of stratified mediums / V. V. Bulatov, Yu. V. Vladimirov. М.: Nauka, 2012.
5. **Булатов В. В.** Волны в стратифицированных средах / В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров. М.: Наука, 2015.
6. **Актуальные** проблемы механики: 50 лет Институту проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН: Сб. ст. / Отв. ред. Ф. Л. Черноусько. М.: Наука, 2015.
7. **Abdilghanie A. M., Diamessis P. J.** The internal gravity wave field emitted by a stably stratified turbulent wake // J. Fluid Mech. 2013. V. 720. P. 104–139.
8. **Rees T., Lamb K. G., Poulin F. J.** Asymptotic analysis of the forces internal gravity waves equation // SIAM J. Appl. Math. 2012. V. 72, N 4. P. 1041–1060.
9. **Свиркунов П. Н., Калашник М. В.** Фазовые картины волн от локализованных источников, движущихся относительно стратифицированной вращающейся среды (перемещающийся ураган, орографическое препятствие) // Докл. АН. Механика. 2012. Т. 447, № 4. С. 396–400.
10. **Rehm R. G., Radt H. S.** Internal waves generated by a translating oscillating body // J. Fluid Mech. 1975. V. 68, N 2. P. 235–258.
11. **Graham E. W., Graham B. B.** The tank wall effect on internal waves due to a transient vertical force moving at fixed depth in a density-stratified fluid // J. Fluid Mech. 1980. V. 97, N 1. P. 91–114.
12. **Стурова И. В.** Внутренние волны, возникающие при нестационарном движении источника в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1985. № 4. С. 122–130.
13. **Булатов В. В., Владимиров Ю. В.** Внутренние гравитационные волны, возбуждаемые пульсирующим источником возмущений // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 6. С. 26–34.

*Поступила в редакцию 6/VII 2016 г.,  
в окончательном варианте — 20/IX 2016 г.*