

УДК 532.59:534.1

ГИБРИДНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ ОТ ГАРМОНИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА ВОЗМУЩЕНИЙ

© 2018 г. В. В. Булатов*, Ю. В. Владимиров**

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
119526 Москва, просп. Вернадского, 101, к. 1*

*E-mails: *internalwave@mail.ru; **vladimyura@yandex.ru*

Поступила в редакцию 25.04.2017 г.

После доработки 09.06.2017 г.

Рассмотрена задача о построении равномерных асимптотик дальних полей поверхностных возмущений от локализованного гармонического источника в потоке тяжелой однородной жидкости бесконечной глубины. Показано, что волновая картина возбуждаемых дальних полей при определенных параметрах генерации представляет собой систему гибридных волновых возмущений, одновременно обладающих свойствами волн двух типов: кольцевидных (поперечных) и клиновидных (продольных). Изучены особенности фазовой структуры и волновых фронтов возбуждаемых полей. Построены равномерные асимптотики решений, описывающие гибридные поверхностные волновые возмущения вдали от гармонического источника.

Ключевые слова: тяжелая жидкость, нестационарный источник, возмущение свободной поверхности, дальние поля, равномерная асимптотика, поперечные и продольные волны.

DOI: 10.7868/S0003351518020113

Поверхностные волновые движения в морской среде могут возникать как вследствие естественных причин (ветровое волнение, обтекание подводных препятствий, изменения рельефа дна, полей плотности и течений), так и порождаться обтеканием искусственных препятствий (платформ, подводных трубопроводов, сложных гидротехнических сооружений) [1–10]. Система уравнений гидродинамики, описывающая поверхностные возмущения, в общем виде представляет достаточно сложную математическую задачу как в плане доказательств теорем существования и единственности решений в соответствующих функциональных классах, так и с вычислительной точки зрения [6, 7, 11]. В рамках линейной теории для аналитического исследования поверхностных волновых возмущений используются методы интегрального представления Маслова, приближенные методы геометрической оптики, а в некоторых случаях также уравнения в конформных переменных [8, 12–14]. Основные результаты решений задач о генерации поверхностных волновых возмущений представляются в самой общей интегральной форме, и в этом случае полученные интегральные решения требуют разработки асимптотических методов их анализа, допускающих качественный анализ и проведение экспресс-оценок получаемых решений [9, 10]. Кроме того, для анализа данных дистанционного

зондирования морской поверхности необходимы знания причин, вызывающие те или иные поверхностные явления [2, 8].

Для детального описания широкого круга физических явлений, связанных с динамикой поверхностных возмущений неоднородных и нестационарных природных сред, необходимо исходить из достаточно развитых математических моделей [6–8]. Трехмерность структуры поверхностного морского волнения также играет существенную роль, и в настоящее время не имеется возможность проведения масштабных вычислительных экспериментов по моделированию трехмерных океанических течений на больших временах с достаточной точностью [6]. Однако в ряде случаев первоначальное качественное представление об изучаемом круге волновых явлений можно получить на основе более простых асимптотических моделей и аналитических методов их исследования. В этой связи необходимо отметить классические задачи гидродинамики о построении асимптотических решений, описывающих эволюцию поверхностных возмущений, возбуждаемых источниками различной природы в тяжелой однородной жидкости [1, 3–5]. В частности, в [1] для некоторых параметров генерации поверхностных волн гармоническим локальным источником возмущений были

рассчитаны границы волновой зоны и поле возвышения методом стационарной фазы. Асимптотические решения, описывающие поверхностные волновые возмущения вдали от нелокализованных осциллирующих источников (колебания дна), исследованы в [14]. Модельные решения позволяют в дальнейшем получить представления поверхностных волновых полей с учетом изменчивости и нестационарности реальных природных сред [9, 10]. Также ряд результатов асимптотического анализа линейных задач, описывающих различные режимы возбуждения и распространения поверхностных возмущений, лежит в основе активно развивающейся в настоящее время нелинейной теории генерации океанических волн экстремально большой амплитуды – волн-убийц [6]. Современное состояние результатов исследований линейных и нелинейных поверхностных волновых возмущений содержится в [8].

В [15, 16] рассматривались задачи о построении равномерных асимптотик дальних полей внутренних и поверхностных возмущений от движущегося стационарного источника. Поэтому представляет интерес рассмотрение более сложных режимов генерации поверхностных волн, обусловленных нестационарностью источника возмущений. Целью настоящей работы является задача построения равномерных асимптотик дальних полей поверхностных возмущений, возбуждаемых при обтекании локализованного гармонического источника возмущений потоком тяжелой однородной жидкости бесконечной глубины.

Рассматривается задача об обтекании гармонического источника возмущений интенсивности $q = Q \exp(i\omega t)$ однородным потоком бесконечно глубокой тяжелой жидкости, имеющим вдали от источника скорость V . Источник расположен на глубине h относительно невозмущенного положения свободной поверхности, т.е. в точке $(0, 0, -h)$. Для того, чтобы найти физически реализуемое решение задачи, необходимо заменить частоту ω на $\omega - i\varepsilon$, и далее устремить ε к нулю в найденном решении для возвышения свободной поверхности. Пусть далее $\Omega(x, y, z, t)$ – потенциал возмущений скорости относительно однородного потока. В рамках линейной теории для определения Ω имеем следующую задачу [3–5, 10]

$$\begin{aligned} \Delta\Omega(x, y, z, t) &= \\ &= Q \exp(i(\omega - i\varepsilon)t) \delta(x) \delta(y) \delta(z + h), \quad z < 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Omega + g \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= 0, \quad z = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

здесь Δ – трехмерный оператор Лапласа, а $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Возвышение свободной поверхности $H(x, y, t)$ определяется из интеграла Коши–Лагранжа [3–5]

$$\begin{aligned} H(x, y, t) &= \\ &= -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \Omega(x, y, z, t), \quad z = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение (1)–(2) ищется в виде

$$\begin{aligned} \Omega(x, y, z, t) &= \exp(i(\omega - i\varepsilon)t) \varphi(x, y, z), \\ H(x, y, t) &= \exp(i(\omega - i\varepsilon)t) \eta(x, y). \end{aligned}$$

В безразмерных переменных $x_* = gxV^{-2}$, $y_* = gyV^{-2}$, $z_* = gzV^{-2}$, $h_* = ghV^{-2}$, $\omega_* = V\omega/g$, $t_* = gt/V$, $\varepsilon_* = V\varepsilon/g$, $\varphi_* = V^2\varphi/Qg$, $\eta_* = V^3\eta/Qg$ для определения функций $\varphi_*(x_*, y_*, z_*)$, $\eta_*(x_*, y_*)$ будем иметь следующую задачу (нижний индекс “*” далее опускается)

$$\Delta\varphi(x, y, z) = \delta(x)\delta(y)\delta(z + h), \quad z < 0, \quad (3)$$

$$\left(i\omega + \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = 0,$$

$$\eta(x, y) = -\left(i\omega + \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi, \quad z = 0. \quad (4)$$

Представим функции $\varphi(x, y, z)$, $\eta(x, y)$ в виде двойных интегралов Фурье

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\mu x) d\mu \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\nu y) f(\mu, \nu, z) d\nu, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \eta(x, y) &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\mu x) d\mu \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\nu y) \Lambda(\mu, \nu) d\nu. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя (5) в (3) получаем следующую краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(\mu, \nu, z)}{\partial z^2} - (\mu^2 + \nu^2) f(\mu, \nu, z) &= \\ &= \delta(z + h), \quad z < 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (i\omega + \varepsilon - i\mu)^2 f(\mu, \nu, z) + \\ + \frac{\partial f(\mu, \nu, z)}{\partial z} &= 0, \quad z = 0. \end{aligned}$$

Решение задачи (7) в области $-h < z < 0$ имеет вид

$$f(\mu, \nu, z) = -\frac{(\omega - \mu)^2 \operatorname{sh}(kz) + k \operatorname{ch}(kz)}{k \exp(kh) ((\varepsilon + i(\omega - \mu))^2 + k)},$$

$$k^2 = \mu^2 + \nu^2.$$

Функция $\Lambda(\mu, \nu)$ определяется из (4)

$$\Lambda(\mu, \nu) = \frac{i(\omega - \mu) \exp(-kh)}{(\varepsilon + i(\omega - \mu))^2 + k}. \quad (8)$$

Нули знаменателя в (8) определяют дисперсионное соотношение: $(\omega - \mu)^2 = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}$, которое можно записать в явном виде

$$\nu(\mu) = \pm \sqrt{(\omega - \mu)^4 - \mu^2}. \quad (9)$$

Множество частот $\omega > 0$ разбивается двумя характерными значениями $\omega_1 = 0.25$ и $\omega_2 = \sqrt{6}/9$ на три интервала. При $\omega < \omega_1$ дисперсионная кривая (9) состоит из трех ветвей: одной замкнутой и двух незамкнутых. Тогда волновая картина представляет собой сумму двух корабельных (продольных) волн с углом полураствора волнового клина, меньшим $\pi/2$, и кольцевых (поперечных) волн вокруг источника. При $\omega > \omega_2$ дисперсионная кривая (9) состоит из двух разомкнутых ветвей без экстремумов. В этом случае волновая картина есть сумма двух корабельных волн с углом полураствора волнового клина, меньшим $\pi/2$. Если $\omega_1 < \omega < \omega_2$, то дисперсионная кривая (9) состоит из двух разомкнутых кривых, одна из которых имеет два локальных экстремума. Одна ветвь дисперсионной кривой отвечает обычным корабельным волнам с углом полураствора волнового клина, меньшим $\pi/2$, а вторая ветвь – корабельным волнам с углом полураствора волнового клина, большим $\pi/2$ (волновой фронт направлен от источника вверх по потоку). Эта система гибридных волн одновременно сочетает в себе черты как кольцевых (поперечных), так и корабельных (продольных) волн. Далее будет рассматриваться этот случай ($\omega = 0.255$).

На рис. 1 изображена ветвь дисперсионной кривой (9) (обозначаемая далее $\nu_1(\mu)$), описывающая гибридные волны. На рис. 2 изображена ветвь дисперсионной кривой (9) (обозначаемая далее $\nu_2(\mu)$), описывающая корабельные волны. При $\varepsilon > 0$ и $\mu < \omega$ имеем $\operatorname{Im} \nu_1(\mu) < 0$, а для $\mu > \omega - \operatorname{Im} \nu_2(\mu) > 0$. Тогда, вычисляя внутренний интеграл в (6) путем замыкания контура интегрирования по переменной ν при $y > 0$ в нижнюю полуплоскость (полюса $\nu_1(\mu)$ и $-\nu_2(\mu)$), а при $y < 0$ в верхнюю полуплоскость (полюса $-\nu_1(\mu)$ и $\nu_2(\mu)$), можно получить

$$\eta(x, y) = I_1(x, y) + I_2(x, y),$$

$$I_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^C \frac{E}{\nu_1(\mu)} \exp(-i(\mu x + \nu_1(\mu) |y|)) d\mu,$$

$$I_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_D^{\infty} \frac{E}{\nu_2(\mu)} \exp(-i(\mu x - \nu_2(\mu) |y|)) d\mu,$$

$$E = (\omega - \mu)^3 \exp(-(\omega - \mu)^2 h),$$

где C и D – абсциссы крайней правой и крайней левой точки дисперсионных кривых $\nu_1(\mu)$ и $\nu_2(\mu)$ на рис. 1 и рис. 2 соответственно. Точки A и G – точки перегиба дисперсионных кривых $\nu_1(\mu)$ и $\nu_2(\mu)$ на рис. 1 и рис. 2 соответственно.

Интегралы $I_2(x, y)$ с соответствующей дисперсионной зависимостью $\nu_2(\mu)$, описывающие обычные корабельные волны, подробно рассмотрены, например, в [9, 10, 15, 16]. Более сложная

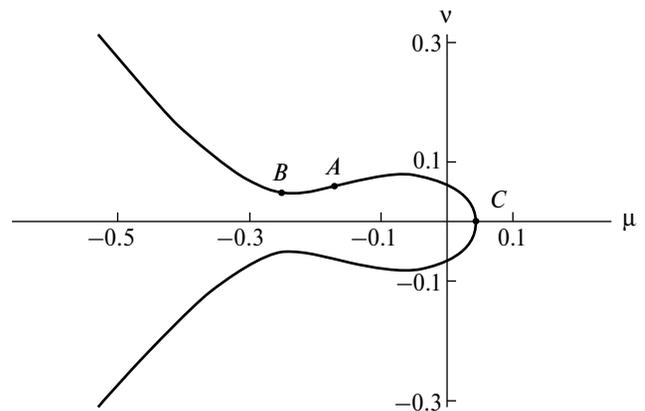


Рис. 1. Дисперсионная кривая $\nu_1(\mu)$.

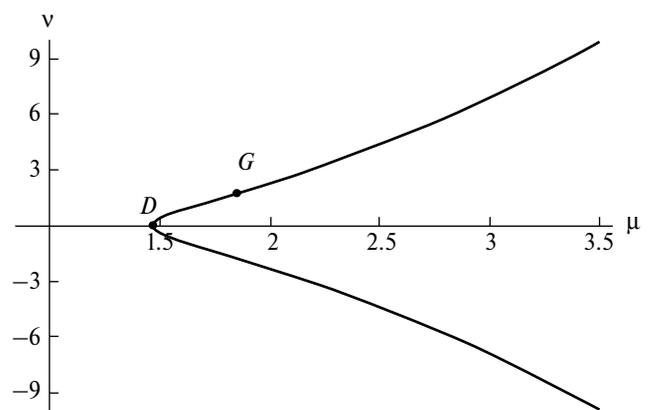


Рис. 2. Дисперсионная кривая $\nu_2(\mu)$.

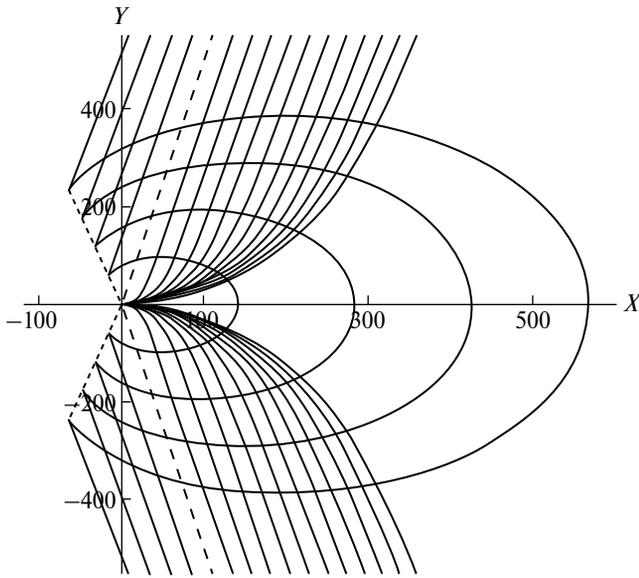


Рис. 3. Линии равной фазы.

и ранее не исследованная волновая картина амплитудно-фазовых характеристик гибридных поверхностных волновых возмущений описывается интегралами $I_1(x, y)$. Введем обозначение для фазы: $\Phi = v_1(\mu) |y| + \mu x$. Тогда, используя условие стационарности фазы в виде

$$\frac{dv_1(\mu)}{d\mu} = -\frac{x}{|y|}, \tag{10}$$

получим семейство линий постоянной фазы с параметром μ (нижний индекс "1" опускается)

$$x = -\frac{\Phi v'(\mu)}{v(\mu) - \mu v'(\mu)}, \quad |y| = \frac{\Phi}{v(\mu) - \mu v'(\mu)}. \tag{11}$$

На рис. 3 изображены линии равной фазы для различных значений Φ с шагом 2π . Части дисперсионной кривой от точки C до точки перегиба A соответствуют кольцевые (поперечные) волны, и совокупность угловых точек возврата образуют волновой фронт вверх по потоку, изображенный на рис. 3 пунктирной линией. Для определения волнового фронта необходимо к уравнениям

$$(11) \text{ добавить условие: } \frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial |y|}{\partial \Phi} - \frac{\partial x}{\partial \Phi} \frac{\partial |y|}{\partial \mu} = 0,$$

или, что то же самое: $\frac{d^2 v(\mu)}{d\mu^2} = 0$, где абсцисса μ_A

точки A является решением данного уравнения. Тогда уравнение для определения фронта будет иметь вид: $x = -v'(\mu_A) |y|$, и соответствующий угол полураствора волнового клина равен $105^\circ 7'$. Части дисперсионной кривой от точки A до

точки B соответствуют продольные гребни волн, идущие от фронта до бесконечности (изображены на рис. 3 левее штриховой линии). Штриховая линия на рис. 3 соответствует гребню волны с фазой $\Phi = 0$ и описывается уравнением:

$$x = -v'(\mu_B) |y|, \quad \text{или} \quad x = \sqrt{16\omega^2 - 1} |y|, \quad \text{где}$$

μ_B – корень уравнения $v(\mu) = \mu v'(\mu)$, решением которого является $\mu_B = -\omega$, $v'(\mu_B) = -\sqrt{16\omega^2 - 1}$. Части дисперсионной кривой левее точки B соответствуют продольные волновые гребни, распространяющиеся из бесконечности в начало координат (правее штриховой линии на рис. 3). На этом рисунке фазы Φ , соответствующие участку дисперсионной кривой правее точки B , имеют значения $2\pi n$, $n = 1, 2, 3, 4$, а левее точки B – значения $2\pi n$, $n = -11, -10, \dots, -1$. На бесконечности (при больших значениях $x, |y|$) уравнения гребней продольных волн имеют вид:

$$x = \sqrt{16\omega^2 - 1} |y| - 2\pi k / \omega, \quad \text{где } k \text{ – целое число, т.е. эти гребни являются гребнями плоской волны с длиной } \lambda = \pi \omega^{-2} \approx 24. \text{ Длина волны кольцевых (поперечных волн) в направлении оси } x \text{ равна } \lambda = 2\pi / C \approx 142, \text{ т.е. примерно в 6 раз больше длины клиновидных (продольных) волн.}$$

Интеграл $I_1(x, y)$ принадлежит к классу интегралов, имеющих две стационарные точки. На фронте волны (пунктирная линия на рис. 3) стационарные точки, определяемые условием (10), сливаются. Равномерная асимптотика $I_1(x, y)$ при больших значениях $|y|$ строится аналогично [15, 16] и имеет вид

$$I_1(x, y) = \frac{T^+(\rho)}{|y|^{1/3}} Ai \left(|y|^{2/3} \sigma(\rho) \right) \exp(-i |y| a(\rho)) - \tag{12}$$

$$-i \frac{T^-(\rho)}{|y|^{2/3} \sqrt{\sigma(\rho)}} Ai' \left(|y|^{2/3} \sigma(\rho) \right) \exp(-i |y| a(\rho)),$$

$$T^\pm(\rho) = \frac{1}{2} \left(F(\mu_2) \sqrt{\frac{-2\sqrt{\sigma(\rho)}}{\theta(\mu_2, \rho)}} \pm F(\mu_1) \sqrt{\frac{2\sqrt{\sigma(\rho)}}{\theta(\mu_1, \rho)}} \right),$$

$$F(\mu) = (\omega - \mu)^3 \exp(-h(\omega - \mu)^2) / v(\mu),$$

$$\sigma(\rho) = \left(\frac{3}{4} (S(\mu_2, \rho) - S(\mu_1, \rho)) \right)^{2/3},$$

$$a(\rho) = \frac{1}{2} (S(\mu_2, \rho) + S(\mu_1, \rho)),$$

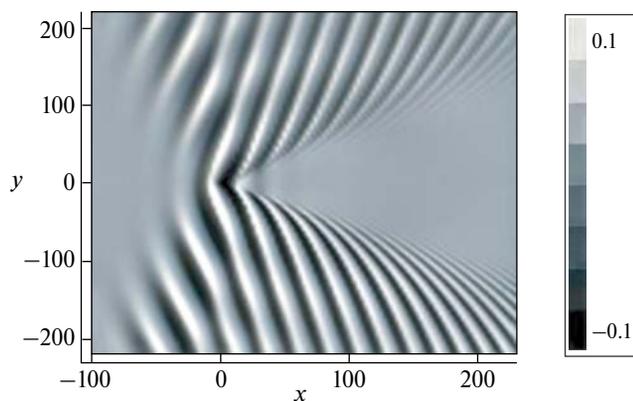


Рис. 4. Поле возвышения свободной поверхности.

$$S(\nu, \rho) = \nu(\mu) - \rho\mu, \quad \rho = -x / |y|,$$

$$\theta(\nu, \rho) = \frac{\partial^2 S(\mu, \rho)}{\partial \mu^2},$$

$$Ai(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau u - u^3/3) du,$$

где $\mu_1 = \mu_1(\rho)$ и $\mu_2 = \mu_2(\rho)$ – корни уравнения $\partial S(\mu, \rho) / \partial \mu = 0$, при этом $|\mu_1| < |\mu_2|$, $Ai(\tau)$ – функция Эйри, $Ai'(\tau)$ – производная функции Эйри.

Для того, чтобы получить выражение для возвышения свободной поверхности, необходимо выражение (12) умножить на $\exp(i\omega t)$ и от полученного результата взять действительную часть. На рис. 4 изображена волновая картина возвышения свободной поверхности при $t = 10$ и $h = 3$, рассчитанная по (12) в безразмерных координатах (в окрестности начала координат интеграл $I_1(x, y)$ рассчитывался численно). При характерных для океанических условий значениях параметров $Q = 10^3 \text{ м}^3/\text{с}$, $V = 3 \text{ м/с}$ амплитуды, возвышение составляет порядка 0,3 метра. Воспользовавшись асимптотиками функции Эйри и ее производной вдали от фронта, можно получить неравномерную асимптотику для $I_1(x, y)$, состоящую из двух слагаемых. Первое из этих слагаемых, соответствующее корню μ_1 , описывает клиновидные (продольные) волны, а второе, соответствующее корню μ_2 , описывает кольцевые (поперечные) волны.

Таким образом, показано, что дальние поля поверхностных возмущений от гармонического локализованного источника в потоке тяжелой жидкости бесконечной глубины при определенных режимах генерации представляют собой гибридную систему волн двух типов: кольцевых (поперечных) и клиновидных (продольных). Нестационарность амплитуды источника возмущений приводит к появлению

не только кольцевых волн, расходящихся по поверхности жидкости непосредственно от источника, но также к генерации гибридных поверхностных возмущений, распространяющихся от источника вверх по потоку. Полученные асимптотики дальних полей поверхностных волновых возмущений дают возможность эффективно рассчитывать основные амплитудно-фазовые характеристики возбуждаемых волновых полей и, кроме того, качественно анализировать полученные решения, что важно для правильной постановки математических моделей волновой динамики поверхностных возмущений реальных природных сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черкесов Л.В. Поверхностные и внутренние волны. Киев: Наукова думка, 1973. 247 с.
2. Поверхностные и внутренние волны в арктических морях / Под ред. Е.Г. Морозова. СПб.: Гидрометеоиздат, 2002. 364 с.
3. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М: Наука, 1977. 816 с.
4. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
5. Pedlosky J. Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin–Heidelberg: Springer, 2010. 260 p.
6. Шамин Р.В. Математические вопросы волнубийц. М.: Ленанд, (Серия: Синергетика от прошлого к будущему. № 76). 2016. 168 с.
7. Ильичев А.Т. Уединенные волны в моделях гидромеханики. М.: Физматлит, 2003. 256 с.
8. Mei C.C., Stiassnie M., Yue D.K.-P. Theory and applications of ocean surface waves. Advanced series of ocean engineering. V. 42. London: World Scientific Publishing, 2017. 1500 p.
9. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. М.: Наука, 2010. 470 с.
10. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
11. Lannes D. Well-posedness of the water waves equations // J. Americ. Mathem/ Soc. 2005. V. 18. P. 605–654.
12. Brown M.G. The Maslov integral representation of slowly varying dispersive wavetrains in inhomogeneous media // Wave Motion. 2000. V. 32. P. 247–266.
13. Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Vasilyev O.A. New method for numerical simulations of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // Europ. J. Mech. B. Fluids. 2002. V. 21. P. 283–291.
14. Dobrokhotov S.Yu., Grushin V.V., Sergeev S.A., Tirozzi B. Asymptotic theory of linear water waves in

- a domain with non-uniform bottom with rapidly oscillating sections // Russian J. Mathem. Phys. 2016. V. 23. P. 455–475.
15. Булатов В.В., Владимиров И.Ю., Владимиров Ю.В. Равномерные асимптотики дальних полей поверхностных возмущений от источника в тяжелой жидкости бесконечной глубины // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 5. С. 104–111.
16. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Дальние поля внутренних гравитационных волн при произвольных скоростях движения источника возмущений // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2015. Т. 51. № 6. С. 684–689.

Hybrid Surface Waves from a Harmonic Perturbation Source

© 2018 V. V. Bulatov*, Yu. V. Vladimirov**

Institute for Problems in Mechanics RAS

Pr. Vernadskogo 101–1, 119526 Moscow, Russia

*E-mails: *internalwave@mail.ru; **vladimyura@yandex.ru*

The problem of constructing uniform asymptotics of surface perturbations far fields from a localized harmonic source in the flow of a heavy homogeneous infinite depth fluid is considered. It is shown that the wave pattern of excited far fields at certain generation parameters is a system of hybrid wave disturbances that simultaneously possess the properties of waves of two types: annular (transverse) and wedge-shaped (longitudinal) waves. The features of the phase structure and wave fronts of the excited fields are studied. Uniform asymptotics of solutions describing hybrid surface wave disturbances far from a harmonic source are constructed.

Keywords: heavy fluid, harmonic source, surface disturbance, far fields, uniform asymptotic, transverse and longitudinal waves.