

УДК 532.59:534.1

ДАЛЬНИЕ ПОЛЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ПУЛЬСИРУЮЩИМ ИСТОЧНИКОМ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ СО СДВИГОВЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ

В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва, Россия
E-mails: internalwave@mail.ru, vladimyura@yandex.ru

Решена задача о дальнем поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых осциллирующим точечным источником возмущений в стратифицированной среде со сдвиговым течением. Рассмотрено модельное распределение скорости сдвигового течения по глубине и получено аналитическое решение задачи в виде характеристической функции Грина, которое выражается через модифицированные функции Бесселя мнимого индекса. Получены выражения для дисперсионных соотношений и построены интегральные представления решений. Исследованы зависимости волновых характеристик возбуждаемых полей от основных параметров использованных моделей стратификации, течений и режимов генерации.

Ключевые слова: стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, частота плавучести, сдвиговые течения.

DOI: 10.15372/PMTF20190605

Среди большого многообразия волновых процессов, наблюдаемых в различных физических средах, особое место занимает взаимодействие возбуждаемых волн с гидродинамическими потоками [1–3]. Движение стратифицированной среды является одним из основных факторов, оказывающих влияние на динамику внутренних гравитационных волн (ВГВ) как в естественных условиях (океан, атмосфера Земли), так и в технических устройствах. В современных исследованиях динамики ВГВ в природных стратифицированных средах с учетом наличия течений применяются асимптотические методы изучения аналитических моделей генерации волн. В линейном приближении существующие подходы к описанию волновой картины возбуждаемых полей ВГВ основаны на представлении волновых полей в виде интегралов Фурье и их асимптотическом анализе [2–10]. В реальных океанических условиях необходимо рассматривать ВГВ, распространяющиеся на фоне средних течений с вертикальным сдвигом скорости, причем скорость по вертикали может изменяться на десятки сантиметров или метров в секунду, т. е. имеет тот же порядок, что и максимальные скорости ВГВ. Такие течения оказывают существенное влияние на распространение ВГВ. В случае если скорость изменения течений по горизонтали много больше скорости ВГВ, а скорость изменения среднего течения во времени много больше периодов

Работа выполнена в рамках Государственного задания № АААА-А17-117021310375-7.

© Булатов В. В., Владимиров Ю. В., 2019

внутренних волн, наиболее адекватной математической моделью является модель стационарных и горизонтальных однородных средних сдвиговых течений [1, 5–8].

Целью настоящей работы является исследование динамики дальних полей ВГВ в стратифицированных средах с учетом сдвиговых течений.

1. Постановка задачи. Рассматривается слой вертикально стратифицированной жидкости толщиной H . Пусть $(U(z), V(z))$ — вектор скорости сдвигового течения на горизонте z . Исходной для дальнейшего анализа является линеаризованная система уравнений гидродинамики относительно невозмущенного состояния, имеющая вид [1–4, 8]

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{DU_1}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \rho_0 \frac{DU_2}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \rho_0 \frac{DW}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0, \\ \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + W \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0, \\ \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U(z) \frac{\partial}{\partial x} + V(z) \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

где U_1, U_2, W — компоненты возмущенной скорости; p, ρ — возмущения давления и плотности; $\rho_0(z)$ — невозмущенная плотность среды. Используя приближение Буссинеска, получаем уравнение для вертикальной компоненты скорости [1, 4]

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{Dt^2} \Delta W - \frac{D}{Dt} \left(\frac{d^2 U}{dz^2} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{d^2 V}{dz^2} \frac{\partial W}{\partial y} \right) + N^2(z) \Delta_2 W = Q(t, x, y, z), \\ \Delta = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $N(z)$ — частота Брента — Вайсяля (частота плавучести); g — ускорение свободного падения; вид функции $Q(t, x, y, z, z_0)$ зависит от характера источника возмущений. Рассматривая в качестве источника направленную по вертикали силу, имеем $Q(t, x, y, z, z_0) = \delta'(t) \delta(z - z_0) (\delta''(x) \delta(y) + \delta''(y) \delta(x))$, в случае рассматриваемого точечного источника массы $Q(t, x, y, z, z_0) = \delta''(t) \delta(x) \delta(y) \delta'(z - z_0)$. В настоящей работе данная функция имеет вид $Q(t, x, y, z, z_0) = \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_0) e^{i\omega t}$, т. е. рассматривается функция Грина для осциллирующего точечного источника возмущений, расположенного на глубине z_0 . Очевидно, что в силу линейности рассматриваемой задачи, используя полученные асимптотические решения, можно найти представления для полей ВГВ, генерируемых произвольными нелокальными источниками [2–4].

Одними из основных источников генерации ВГВ в океане являются атмосферные циклоны. Возбуждаемые с помощью этого механизма генерации волновые поля могут играть значительную роль в различных механизмах переноса энергии в толще океана. Экспериментальное обнаружение следа ВГВ, возбуждаемой движущимся ураганом, является существенным достижением современной океанологии. На больших расстояниях реальные источники возмущений (тайфун, возмущения атмосферного давления, циклон) допускают физически обоснованную аппроксимацию с помощью некоторой системы точечных локализованных источников, взятых с определенными весами. Такой подход является общепринятым и физически обоснованным для решения большинства задач моделирования динамики ВГВ в океане с учетом сдвиговых течений. На больших расстояниях от источников возмущений форма источника практически не влияет на волновые характеристики ВГВ и почти полностью определяется параметрами стратифицированной среды и соответствующими законами дисперсии [1, 4, 6, 7, 9, 10].

Граничные условия задаются в виде (вертикальная ось z направлена вверх)

$$z = 0, \quad z = -H: \quad W = 0. \quad (1.2)$$

Далее используются следующие предположения. Частота Брента — Вайсяля полагается постоянной: $N(z) = N = \text{const}$, течение — одномерным: $V(z) \equiv 0$. Функция $U(z)$ представляет собой линейную функцию глубины $U(z) = U_0 + (U_0 - U_H)z/H$, где $U_0 = U(0)$; $U_H = U(-H)$. Данная гидрологическая модель широко используется в реальных океанологических расчетах и позволяет описывать основные особенности волновой динамики с учетом реального изменения плотности морской среды, наблюдаемого при натурных измерениях ВГВ в океане, а также исследовать задачу аналитически [1, 6, 7, 11, 12]. Тогда с использованием безразмерных координат и переменных

$$x^* = \frac{\pi x}{H}, \quad y^* = \frac{\pi y}{H}, \quad z^* = \frac{\pi z}{H}, \quad W^* = \frac{WHN^2}{\pi q}, \quad \omega^* = \frac{\omega}{N}, \quad t^* = tN,$$

$$M(z^*) = \frac{\pi U(z^*)}{NH} = a + bz^*, \quad a = \frac{\pi U_0}{NH}, \quad b = \frac{U_0 - U_H}{NH}$$

(индекс “*” далее опускается) из (1.1), (1.2) получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + M(z) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Delta W + \Delta_2 W = e^{i\omega t} \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_0); \quad (1.3)$$

$$z = 0, \quad z = -\pi: \quad W = 0. \quad (1.4)$$

Далее используются следующие значения параметров: $a = 0,8$, $b = 0,2$, $\omega = 0,54$. Представим функцию $W(t, x, y, z)$ в виде $W(t, x, y, z) = e^{i\omega t} w(x, y, z)$. Решение (1.3), (1.4) находим в виде интегралов Фурье

$$w(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu, \nu, z) e^{-i(\mu x + \nu y)} d\mu. \quad (1.5)$$

Для определения функции $\varphi(\mu, \nu, z)$ необходимо решить краевую задачу

$$\frac{\partial^2 \varphi(\mu, \nu, z)}{\partial z^2} + k^2 ((\omega - \mu M(z))^{-2} - 1) \varphi(\mu, \nu, z) = -\delta(z - z_0) (\omega - \mu M(z))^{-2}, \quad (1.6)$$

$$\varphi(\mu, \nu, 0) = \varphi(\mu, \nu, -\pi) = 0, \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2.$$

2. Построение аналитических решений. В качестве двух линейно независимых решений задачи (1.6) с нулевой правой частью используем решения, выражающиеся через модифицированную функцию Бесселя с мнимым индексом [13]:

$$f_{1,2}(z) = \sqrt{2\beta(\omega - \mu M(z))} I_{\pm i\lambda}(\beta(\omega - \mu M(z))),$$

где индексу “1” соответствует знак “+”, индексу “2” — знак “-”; $\lambda = \sqrt{\beta^2 - 1/4}$; $\beta = k/(b\mu)$. Функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ являются комплексно-сопряженными. Будем полагать, что скорость сдвигового течения положительна на всей глубине стратифицированной среды, т. е. $a > 0$, $a - b\pi > 0$. Также будем полагать, что для числа Ричардсона выполняется условие устойчивости Майлса $\text{Ri} = N^2(\partial U/\partial z)^{-2} > 1/4$, т. е. $b^2 < 4$ [1–4, 8]. Отсюда, в частности, следует, что $\beta^2 > 1/4$ и значения λ действительны. Функция $I_{i\lambda}(\tau)$ при действительных значениях λ и при $|\tau| < \lambda$ осциллирует. При мнимых значениях λ функция $I_{i\lambda}(\tau)$ стремится к бесконечности при больших τ и не осциллирует при $\tau > 0$ [13]. Для того чтобы значения λ были действительными для любых k , μ , достаточно, чтобы выполнялось условие $b^2 < 4$, совпадающее с условием Майлса для числа Ричардсона. Функция

$\varphi_1(z) = i(f_1(0)f_2(z) - f_2(0)f_1(z))$ является действительной и удовлетворяет граничному условию при $z = 0$. Функция $\varphi_2(z) = i(f_1(-\pi)f_2(z) - f_2(-\pi)f_1(z))$ является действительной и удовлетворяет граничному условию при $z = -\pi$. Тогда характеристическая функция Грина уравнения (1.6) принимает вид

$$\varphi(\mu, \nu, z) = -\frac{1}{B(\omega - \mu M(z))^2} \begin{cases} \varphi_1(z)\varphi_2(z_0), & z > z_0, \\ \varphi_1(z_0)\varphi_2(z), & z < z_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$B = \varphi_1(z_0)F_2(z_0) - \varphi_2(z_0)F_1(z_0), \quad F_j(z) = \frac{\partial \varphi_j(z)}{\partial z}, \quad j = 1, 2$$

(вронскиан B не зависит от переменной z). Вводя обозначения $z_- = \min(z, z_0)$, $z_+ = \max(z, z_0)$, функцию Грина $\varphi(\mu, \nu, z)$ (2.1) можно представить в виде

$$\varphi(\mu, \nu, z) = -\frac{1}{(\omega - \mu M(z))^2} \frac{\varphi_1(z_+)\varphi_2(z_-)}{\varphi_1(-\pi)F_2(-\pi)}.$$

Проинтегрируем выражение (1.5) по переменной μ . С помощью метода возмущений можно показать, что контур интегрирования по μ проходит выше действительной оси на комплексной плоскости μ . Амплитуда подынтегральной функции $\varphi(\mu, \nu, z)$ аналитична по μ вне полюсов этой функции и разреза L , проведенного вдоль действительной оси μ от μ_1^* до μ_2^* , где $\mu_1^* = \omega/a$, $\mu_2^* = \omega/(a - \pi b)$ — нули функции $I_{\pm i\lambda}$ при $z = 0$, $z = -\pi$ соответственно. В данном случае $\mu_1^* = 0,675$, $\mu_2^* = 3,145$. Точка z_0 является критической, если $\omega - \mu_0 M(z_0) = 0$, где соответствующая точка $\mu_0 \in L$, если $z_0 \in [0, -\pi]$. Таким образом, критическим значениям по z соответствуют точки разреза L на комплексной плоскости μ . Нули вронскиана B — корни уравнения $\varphi_1(-\pi) = 0$. При этом дисперсионное соотношение можно представить в виде

$$I_{i\lambda}(\beta(\omega - \mu a))I_{-i\lambda}(\beta(\omega - \mu a + \mu b\pi)) = I_{-i\lambda}(\beta(\omega - \mu a))I_{i\lambda}(\beta(\omega - \mu a + \mu b\pi)). \quad (2.2)$$

Корни уравнения (2.2) образуют две серии собственных значений (дисперсионных кривых) $\mu_{n1}(\nu)$, $\mu_{n2}(\nu)$. С увеличением значений n значения $\mu_{n1}(\nu)$ также увеличиваются и стремятся к μ_1^* , а значения $\mu_{n2}(\nu)$ уменьшаются и стремятся к μ_2^* . Заметим, что при $\mu = \mu_{nj}(\nu)$ ($j = 1, 2$) функции $\varphi_{n1}(\mu, \nu, z)$, $\varphi_{n2}(\mu, \nu, z)$ представляют собой собственные функции задачи (1.6), которые равны между собой с точностью до постоянного множителя. Поэтому, не нарушая общности, можно полагать, что $\varphi_{n1}(\mu_{nj}(\nu), \nu, z) = \varphi_{n2}(\mu_{nj}(\nu), \nu, z) = \varphi_{nj}(\nu, z)$ ($j = 1, 2$). Для вычисления интеграла по переменной μ в (1.5) необходимо замкнуть контур интегрирования в нижнюю полуплоскость, учесть интеграл по разрезу L и сумму вычетов в полюсах $\mu = \mu_{nj}(\nu)$. Получаем

$$w(x, y, z) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} A_{nj}(\nu, z, z_0) e^{-i(\mu_{nj}(\nu)x + \nu y)} d\nu + J,$$

$$A_{nj}(\nu, z, z_0) = \frac{\varphi_{nj}(\nu, z)\varphi_{nj}(\nu, z_0)}{D(\mu_{nj}(\nu), \nu, -\pi)F_{nj}(\nu, -\pi)(\omega - \mu_{nj}(\nu)M(z))^2},$$

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} I(\nu, z, z_0) e^{-i\nu y} d\nu, \quad F_{nj}(\nu, z) = \frac{\partial \varphi_{nj}(\nu, z)}{\partial z}, \quad D(\mu, \nu, z) = \frac{\partial \varphi_1(\mu, \nu, z)}{\partial \mu},$$

где $I(\nu, z, z_0)$ — интеграл вдоль берега разреза L . Можно показать, что вклад интеграла вдоль берега разреза мал по сравнению со вкладом полюсов $\mu = \mu_{nj}(\nu)$, поэтому далее

интеграл J не рассматривается. Таким образом, с учетом гармонической зависимости от времени волновое поле ВГВ $W(x, y, z, t)$ можно представить в виде суммы мод двух типов

$$W(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{n1}(x, y, z, t) + W_{n2}(x, y, z, t),$$

$$W_{nj}(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} A_{nj}(\nu, z, z_0) e^{-i(\mu_{nj}(\nu)x + \nu y - \omega t)} d\nu, \quad j = 1, 2. \quad (2.3)$$

Вдали от источника возмущений при больших значениях x, y интегралы (2.3) в приближении метода стационарной фазы имеют вид [4, 10]

$$W_{nj}(x, y, z, t) = Z_{nj-} + Z_{nj+},$$

$$Z_{nj\pm} = \frac{A_{nj}(\mu_{nj}(\nu_{nj}^{\pm}), \nu_{nj}^{\pm}, z)}{\sqrt{2\pi x(\pm S_{nj}(\nu_{nj}^{\pm}))}} \cos(-i(\mu_{nj}(\nu_{nj}^{\pm})x - \nu_{nj}^{\pm}y \pm \pi/4 + \omega t)),$$

$$S_{nj}(\nu) = \frac{d^2 \mu_{nj}(\nu)}{d\nu^2}, \quad j = 1, 2,$$

где ν_{nj}^{\pm} — корни уравнения $d\mu_{nj}(\nu)/d\nu = y/x$. Выражения (2.4) справедливы только внутри соответствующих волновых клиньев, полуугол раствора θ каждого из клиньев определяется из соотношений $\theta = \arctg(\mu_{nj}(\nu_{nj}^*))$ (ν_{nj}^* — корень уравнения $S_{nj}(\nu_{nj}^*) = 0$). Асимптотическое приближение, описывающее волновые поля ВГВ вдали от источника возмущений и справедливое как вблизи, так и вдали от волновых клиньев (равномерная асимптотика) выражается через функцию Эйри и ее производную [4, 10].

3. Фазовые и волновые картины. Рассмотрим картину возбуждаемых полей ВГВ. Дисперсионные кривые первого типа пересекают ось абсцисс, величина полуугла раствора волнового клина меньше $\pi/2$, волновая картина для волн этого типа представляет собой систему клиновидных и поперечных волновых пакетов. Соответствующая фазовая структура имеет вид вложенных внутри волновых клиньев криволинейных треугольников, обращенных вершиной к началу координат. Дисперсионные кривые второго типа всегда расположены выше оси абсцисс, в этом случае волновая картина представляет собой систему клиновидных и продольных волн с более простой фазовой структурой. Полуугол раствора клина волн второго типа всегда меньше полуугла раствора клина волн первого типа. Основной вклад в полное поле ВГВ вносят волновые моды первого типа, амплитуды волн второго типа в несколько раз меньше амплитуд волн первого типа. Полуугол раствора для возбуждаемых вниз по потоку волн обоих типов зависит от глубины погружения источника возмущений. В данной модели стратифицированной среды амплитуда сдвигового течения уменьшается с уменьшением глубины. Поэтому при увеличении глубины погружения источника возмущений уменьшается отношение локальной по глубине скорости стратифицированного потока к максимальной групповой скорости возбуждаемых ВГВ, что приводит к увеличению полуугла раствора соответствующего волнового клина.

На рис. 1 приведены дисперсионные кривые первой моды $\mu_{11}(\nu)$ и $\mu_{12}(\nu)$ при $\nu > 0$ ($\mu_{nj}(\nu)$ — четные функции). На рис. 2, а показаны первые три подынтегральные амплитуды для мод первого типа $A_{11}(z)$, $A_{21}(z)$, $A_{31}(z)$ при $\nu = 0,1$, $z_0 = -0,9$, на рис. 2, б — три подынтегральные амплитуды для мод второго типа $A_{12}(z)$, $A_{22}(z)$, $A_{32}(z)$ при $\nu = 0,1$, $z_0 = -2,5$. На рис. 3 представлены трехмерные волновые картины первой моды первого типа $W_{11}(x, y, z)$ при $z = -0,5$, $z_0 = -0,9$ и второго типа $W_{12}(x, y, z)$ при $z = -2,9$, $z_0 = -2,5$.

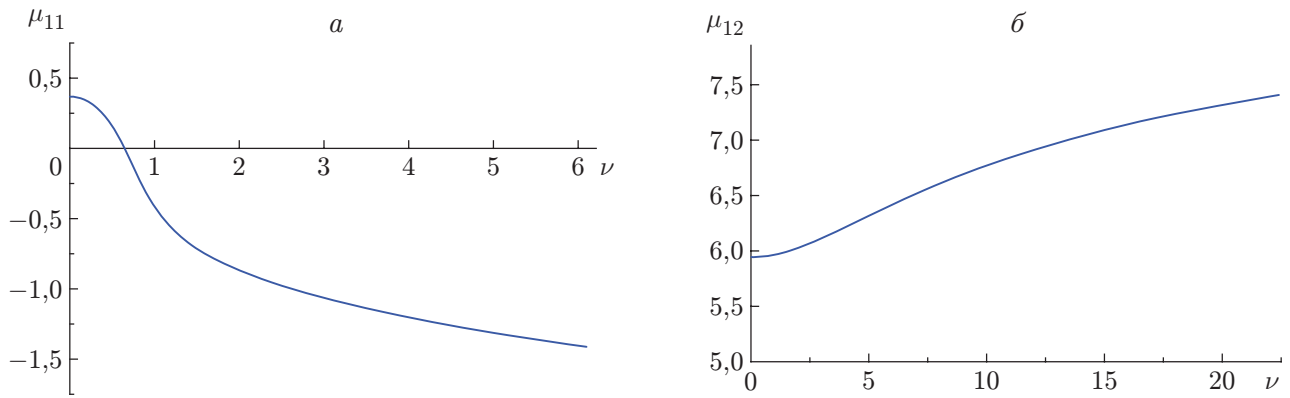


Рис. 1. Дисперсионные кривые первой моды $\mu_{11}(\nu)$ (а) и $\mu_{12}(\nu)$ (б)

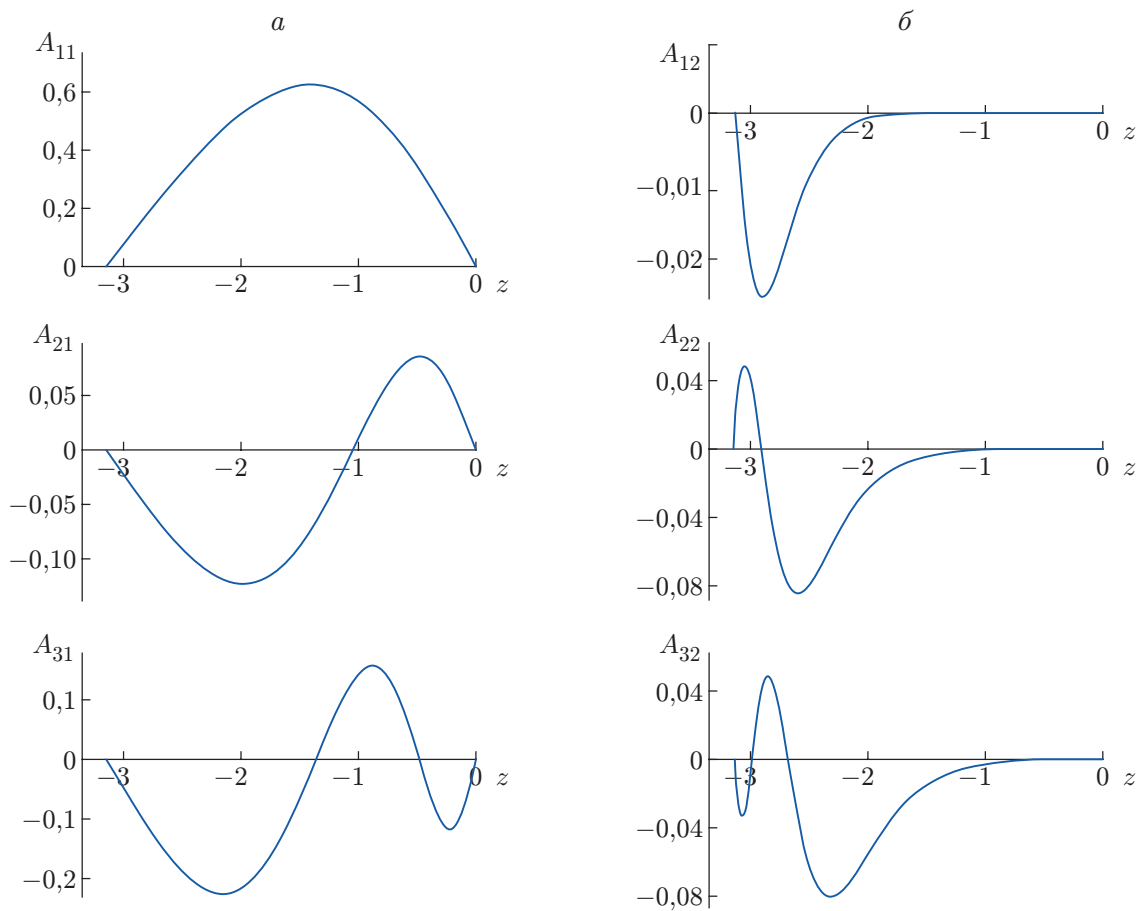


Рис. 2. Подынтегральные амплитуды для первых трех мод первого (а) и второго (б) типов

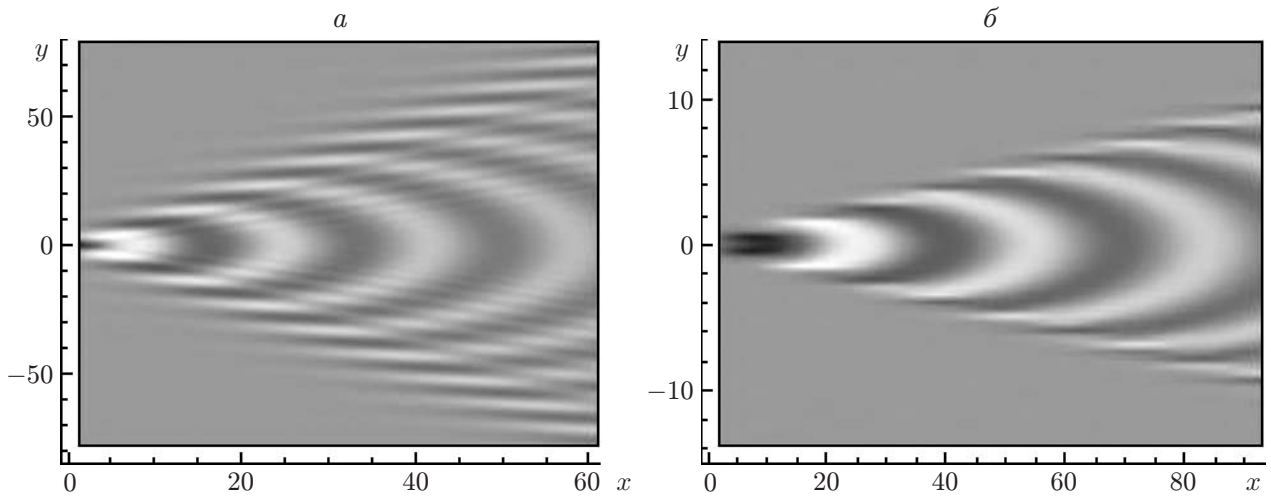


Рис. 3. Волновые картины первой моды первого (а) и второго (б) типов

Таким образом, решена задача о дальнем поле внутренних гравитационных волн, возбуждаемых осциллирующим точечным источником возмущений в стратифицированной среде со сдвиговым течением. Для аналитического решения задачи использованы постоянное распределение частоты плавучести и линейная зависимость скорости сдвигового течения от глубины. Получено аналитическое представление решения в виде характеристической функции Грина, которое выражается через модифицированные функции Бесселя мнимого индекса. Получены выражения для дисперсионных соотношений и построены интегральные представления решений для волновых полей. Исследованы зависимости характеристик возбуждаемых дальних полей внутренних гравитационных волн от основных параметров использованной модельной стратификации, течений и режимов генерации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Fabrikant A. L.** Propagation of waves in shear flows / A. L. Fabrikant, Yu. A. Stepanyants. Berlin: World Sci. Publ., 1998.
2. **Pedlosky J.** Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010.
3. **Sutherland B. R.** Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010.
4. **Булатов В. В.** Волны в стратифицированных средах / В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров. М.: Наука, 2015.
5. **Vlasenko V.** Baroclinic tides / V. Vlasenko, N. Stashchuk, K. Hutter. N. Y.: Cambridge Univ. Press, 2005.
6. **Morozov E. G.** Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin: Springer, 2018.
7. **Velarde M. G.** The ocean in motion / M. G. Velarde, R. Yu. Tarakanov, A. V. Marchenko. Berlin: Springer Oceanography: Springer Intern. Publ. AG, 2018.
8. **Fraternale F., Domenicale L., Staffilan G., Tordella D.** Internal waves in sheared flows: Lower bound of the vorticity growth and propagation discontinuities in the parameter space // Phys. Rev. 2018. V. 97, N 6. 063102.
9. **Свиркунов П. Н., Калашник М. В.** Фазовые картины диспергирующих волн от движущихся локализованных источников // Успехи физ. наук. 2014. Т. 184, № 1. С. 89–100.

10. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. Внутренние гравитационные волны, возбуждаемые движущимся с докритической скоростью осциллирующим источником возмущений // ПМТФ. 2017. Т. 58, № 6. С. 50–57.
11. Frey D. I., Novigatsky A. N., Kravchishina M. D., Morozov E. G. Water structure and currents in the Bear Island Trough in July — August 2017 // Russ. J. Earth Sci. 2017. V. 17. ES3003.
12. Morozov E. G., Tarakanov R. Yu., Frey D. I., et al. Bottom water flows in the tropical fractures of the Northern Mid-Atlantic Ridge // J. Oceanography. 2018. V. 74, N 2. P. 147–167.
13. Никифоров А. Ф. Специальные функции математической физики / А. Ф. Никифоров, В. В. Уваров. М.: Издат. дом “Интеллект”, 2008.

*Поступила в редакцию 21/III 2019 г.,
после доработки — 21/V 2019 г.
Принята к публикации 27/V 2019 г.*
