МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 2010

УДК 532.59

© 2010 г. В. В. БУЛАТОВ, Ю. В. ВЛАДИМИРОВ

ОЦЕНКА ГРАНИЦ ПРИМЕНИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

С помощью метода возмущений получены оценки границ применимости линейной теории внутренних гравитационных волн. Показано, что в диапазоне длин волн, характерном для реального океана, при исследовании динамики внутренних гравитационных волн можно пользоваться линейным приближением, что подтверждает его адекватность и обоснованность для соответствующих пространственно-временных масштабов линейной модели волновой динамики.

Ключевые слова: внутренние гравитационные волны, стратифицированная среда, метод возмущений.

Внутренние гравитационные волны, являющиеся частными случаями волновых движений неоднородных сред, как правило, исследуются с помощью универсальных математических методов, имеющих известные аналогии с волнами иной физической природы [1, 2]. Такой подход позволяет получить формальный ответ, но не гарантирует адекватности решения актуальных фундаментальных и прикладных задач исследования волновой динамики природных стратифицированных сред (океан, атмосфера) [3–5]. Специфические соотношения пространственно-временных масштабов, например, в океане, и связанные с этим трудности определяют необходимость исследования в настоящей работе вопроса о границах применимости линейной теории динамики внутренних гравитационных волн. Возбуждение, распространение внутренних гравитационных волн в реальных условиях представляют собой существенно нелинейные явления, однако, при некоторых разумных предположениях, можно линеаризовать уравнения генерации и распространения внутренних волн [3, 5–8]. В [1, 2] использовались линейные приближения для исследования волновой динамики внутренних гравитационных волн в стратифицированных средах, поэтому представляет интерес оценить адекватность сделанных предположений для реальных пространственно-временных геофизических масштабов.

1. Исходные уравнения. Система уравнений гидродинамики с учетом нелинейности, вязкости, вращения Земли и в адиабатическом приближении для уравнения состояния имеет вид [3, 5, 9]

$$
\begin{aligned}
&\rho\frac{dU_1}{dt}+\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho f U_2+\nu\left[\Delta_3 U_1+\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\mathbf{U}\right]+F_x\\
&\rho\frac{dU_2}{dt}+\frac{\partial p}{\partial y}=-\rho f U_1+\nu\left[\Delta_3 U_2+\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{div}\mathbf{U}\right]+F_y\\
&\rho\frac{dW}{dt}+\frac{\partial p}{\partial x}+g\rho=\nu\left[\Delta_3 W+\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{div}\mathbf{U}\right]+F_z\\
&\frac{1}{c^2}\frac{dp}{dt}=\frac{d\rho}{dt}\\
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\mathbf{U}=M
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+U_1\frac{\partial}{\partial x}+U_2\frac{\partial}{\partial y}+W\frac{\partial}{\partial z},\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad \Delta_3=\Delta+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$f=2\Omega\sin\theta, \Omega=7.27\cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$ – частота вращения Земли, θ – географическая широта, $\nu=10^{-2}$см^2/с – коэффициент вязкости; $\mathbf{U}=(U_1,U_2,W)$ – компоненты скорости, p, ρ – давление и плотность, ось z направлена вертикально вверх, $g=980$ см/с^2 – ускорение силы тяжести, $c=1.5\cdot 10^5$ см/с^2 – скорость звука в океане; F_x, F_y, F_z – плотности действующих на жидкость объемных сил и M – плотность источников массы [3, 5, 9].

Далее будет рассматриваться или безграничная по вертикали среда, или слой, ограниченный дном $z=-H$ и свободной поверхностью $z=\varsigma(x,y,t)$. При наличии вязкости на дне необходимо ставить условие прилипания: $U_1=U_2=W=0$ при $z=-H(y,z)$, которое формировало бы соответствующий пограничный слой. Однако для внутренних гравитационных волн в океане характерны малые значения скоростей частиц, порядка 10 см/с или ниже и, соответственно малые значения градиентов скорости. Ввиду этого, на дне используется условие непротекания [5–8]

$$W-U_1\frac{\partial H}{\partial x}-U_2\frac{\partial H}{\partial y}=0\quad (z=-H(x,y))\tag{1.2}$$

Для горизонтального дна ($H=\text{const}$) это условие упрощается

$$W=0\quad (z=-H)\tag{1.3}$$

На свободной поверхности океана $z=\varsigma(x,y,z)$ ставятся два граничных условия – кинематическое и динамическое. Кинематическое условие требует, чтобы для частиц жидкости на поверхности нормальная к поверхности компонента скорости (U_1, U_2, W) совпадала со скоростью смещения поверхности

$$z=\varsigma: W=\frac{\partial\varsigma}{\partial t}+U_1\frac{\partial\varsigma}{\partial x}+U_2\frac{\partial\varsigma}{\partial y}=\frac{d\varsigma}{dt}\tag{1.4}$$

Динамическое условие требует, чтобы давление на поверхности совпадало с атмосферным давлением, которое далее полагаем равным нулю [5-8]

$$p(x,y,\varsigma(x,y,t))=0\tag{1.5}$$

Система уравнений (1.1) и граничные условия (1.2) – (1.5) линеаризуются относительно состояния покоя

$$U_1=U_2=W=0;\quad \rho=\rho_0(z),\quad p=p_0(z)=-g\int_0^z\rho_0(z)dz$$

Для этого положим $p=p_0+p^*, \rho=\rho_0+\rho^*; U_1=U_1^*, U_2=U_2^*, W=W^*$ и выпишем уравнения для $p^*, \rho^*, U_1^*, U_2^*, W^*$ (далее верхний индекс * опускается)

$$\rho_0\frac{\partial U_1}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}=Q_x+F_x=S_x$$

$$\rho_0\frac{\partial U_2}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial y}=Q_y+F_y=S_y$$

$$\rho_0\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial z}+g\rho=Q_z+F_z=S_z\tag{1.6}$$

$$\rho_0\left[\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial U_2}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial t}\right]=R+M=\Phi$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+W\frac{\partial \rho_0}{\partial z}=T$$

Здесь правые части Q_x, Q_y, Q_z, R, T включают в себя члены, обусловленные вращением среды, вязкостью, сжимаемостью среды и нелинейностью среды соответственно

$$Q_x=-\rho\frac{\partial U_1}{\partial t}-(\rho+\rho_0)\left[U_1\frac{\partial U_1}{\partial x}+U_2\frac{\partial U_1}{\partial y}+W\frac{\partial U_1}{\partial t}+fU_2\right]+\nu\left[\Delta_3 U+\frac{\partial D}{\partial x}\right]$$

$$Q_y=-\rho\frac{\partial U_2}{\partial t}-(\rho+\rho_0)\left[U_1\frac{\partial U_2}{\partial x}+U_2\frac{\partial U_2}{\partial y}+W\frac{\partial U_2}{\partial t}-fU_1\right]+\nu\left[\Delta_3 V+\frac{\partial D}{\partial y}\right]$$

$$Q_z=-\rho\frac{\partial W}{\partial t}-(\rho+\rho_0)\left[U_1\frac{\partial W}{\partial x}+U_2\frac{\partial W}{\partial y}+W\frac{\partial W}{\partial z}\right]+\nu\left[\Delta_3 W+\frac{\partial D}{\partial z}\right]$$

$$R=-\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial p}{\partial t}+U_1\frac{\partial p}{\partial x}+U_2\frac{\partial p}{\partial y}+W\frac{\partial p}{\partial z}\right]-\rho D$$

$$T=-U_1\frac{\partial \rho}{\partial x}-U_2\frac{\partial \rho}{\partial y}-W\frac{\partial \rho}{\partial z}+\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial p}{\partial t}+U_1\frac{\partial p}{\partial x}+U_2\frac{\partial p}{\partial y}+W\frac{\partial p}{\partial z}\right]$$

$$D=\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial U_2}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}$$

Внутренние гравитационные волны имеют на поверхности $z=0$ весьма малые возмущения ς, поэтому, линеаризуя на ней граничные условия, имеем [1, 2, 5, 9]: $z=0: W=\partial\varsigma/\partial t$, $p(x,y,0,t)=\varsigma(x,y,t)g\rho_0(0)$. Отсюда можно получить

$$z=0: \frac{\partial p}{\partial t}-Wg\rho_0(0)=0 \tag{1.7}$$

Исключая из системы уравнений (1.6) переменные U_1, U_2, ρ, p, находим для вертикальной компоненты скорости обычное уравнение внутренних гравитационных волн с некоторой ненулевой правой частью

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3 W+N^2(z)\Delta W=Z$$

$$Z=\frac{N^2(z)}{g}\frac{\partial^3 W}{\partial z\partial t^2}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2}{\partial z\partial t}\left[\frac{\partial S_x}{\partial x}+\frac{\partial S_y}{\partial y}-\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right]+\frac{\Delta_h}{\rho_0}\frac{\partial S_z}{\partial t}-\frac{g}{\rho_0}\Delta T \tag{1.8}$$

$$N^2(z)=-\frac{g}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}$$

где $N^2(z)$ – частота Брента–Вяйсяля. Граничное условие на дне $z=-H$ сохраняет вид (1.2) или (1.3). Применяя к выражению (1.7) оператор Δ и выражая Δp_t через W, получим условие при $z=0$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial z\partial t^2}-g\Delta W=\frac{1}{\rho_0}\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 S_x}{\partial t\partial x}-\frac{\partial^2 S_y}{\partial t\partial y}\right] \tag{1.9}$$

В уравнении (1.8) и граничном условии (1.9) правые части – это сумма слагаемых, зависящих от сторонних источников (массовых сил **F** и плотности источников массы M) и малых поправок, учитывающих вязкость, сжимаемость и вращение среды, а также поправок, обусловленных использованием приближения Буссинеска и имеющих порядок $N^2/g \ll 1$ [3, 5, 9].

2. Оценка границ применимости линейного приближения. Уравнение (1.8) удобно для дальнейшей оценки методом возмущений влияния этих поправок. Распространение внутренних гравитационных волн при наличии малых добавок, обусловленных, например, наличием нелинейных слагаемых, описывается уравнением [3, 10]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3 W + N^2(z)\Delta W = \varepsilon P(W) \tag{2.1}$$

где в выражение для P будут входить только слагаемые, учитывающие нелинейность исходной системы уравнений гидродинамики [3, 10]. Параметр ε – отношение скорости частицы к фазовой скорости внутренних гравитационных волн, показывает, что эти слагаемые малы [3, 8–10]. Далее используется формальное разложение решения уравнения (2.1) по степеням ε. Исследуем вопрос о том, как влияет поправка εP на распространение одной отдельной волновой моды внутренних гравитационных волн. С целью упрощения выкладок рассматривается плоский случай, т.е. зависимость от координаты y отсутствует ($U_2 \equiv 0$). Обозначим далее $U_1 \equiv U$, тогда задачу можно поставить следующим образом. Пусть поправка εP включается при $t = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) + N^2(z)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \varepsilon\Theta(t)P(W) \tag{2.2}$$

где $\Theta(t) = 0$ при $t < 0$ и $\Theta(t) = 1$ при $t > 0$, и правая часть P этого уравнения имеет вид

$$P = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\left(W\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) - U\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) + \rho\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial z} - \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial t}\right) +$$

$$+ g\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(U\frac{\partial \rho}{\partial x} + W\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)$$

где ρ – возмущение плотности, нормированное на некоторое типичное значение невозмущённой плотности ρ_0^*. Для дальнейшего анализа при $t < 0$ можно использовать решение уравнения (2.2) с нулевой правой частью в виде собственной волновой моды [10]: $W_0 = A\varphi_n(z,k)\cos(\omega_n(k)t - kx)$, где $\omega_n(k)$ и $\varphi_n(z,k)$ дисперсионные кривые и нормированные собственные функции основной вертикальной спектральной задачи внутренних гравитационных волн [1, 2, 5]

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 \varphi_n(z,k)}{\partial z^2} + k^2\left(\frac{N^2(z)}{\omega_n^2(k)} - 1\right)\varphi_n(z,k) = 0 \\ \varphi_n(z,k) = 0, \quad z = 0, -H\end{gathered} \tag{2.3}$$

Тогда соответствующие нулевому приближению W_0 горизонтальная скорость U_0 и возмущение плотности ρ_0 имеют вид

$$U_0 = \frac{A}{k}\frac{\partial\varphi_n(z,k)}{\partial z}\sin\left(\omega_n(k)t - kx\right)$$
$$\rho_0 = \frac{AN^2(z)}{\omega_n(k)g}\varphi_n(z,k)\sin(\omega_n(k)t - kx) \tag{2.4}$$

При $t > 0$ решение (2.2) будем искать в виде ряда по степеням малого параметра ε: $W = W_0 + \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \ldots$ [3, 10]. Тогда для определения функции W_1 получается уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2}\right) + N^2(z)\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} = P(W_0) \tag{2.5}$$

Решение уравнения (2.2), совпадающее с W_0 при $t < 0$, непрерывно вместе со своей производной по t. Следовательно, при $t = 0$ функция W_1 и ее производная по t обращаются в нуль: $W_1 = \partial W_1/\partial t = 0$. Поскольку в реальных океанических условиях возбуждаются, как правило, только первые моды [5, 9], то в дальнейшем будем рассматривать первую волновую моду. Тогда правая часть в (2.5) имеет вид

$$\begin{aligned}P(W_0) = {} & A^2 2k\sin\left(2\omega_1(k)t - 2kx\right)\left[\frac{N^2(z)\omega_1(k)}{gk}\left(\varphi_1(z,k)\frac{\partial^2\varphi_1(z,k)}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial\varphi_1(z,k)}{\partial z}\right)^2\right) - \right.\\ & -\frac{2N^2(z)k\omega_1(k)\left(\varphi_1(z,k)\right)^2}{g} - \frac{\omega_1(k)}{k}\left(\frac{\partial\varphi_1(z,k)}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi_1(z,k)}{\partial z^2} - \varphi_1(z,k)\frac{\partial^3\varphi_1(z,k)}{\partial z^3}\right) + \\ & \left. + \frac{\omega_1(k)\varphi_1(z,k)}{gk}\frac{\partial\varphi_1(z,k)}{\partial z}\frac{\partial N^2(z)}{\partial z} - \frac{k}{\omega_1(k)}\left(\frac{\partial\varphi_1(z,k)}{\partial z}\right)^2\frac{\partial N^2(z)}{\partial z}\right] = \\ & \equiv \Phi(z,k)\sin(2\omega_1(k)t - 2kx)\end{aligned} \tag{2.6}$$

Решение уравнения (2.5) будем искать в виде ряда по собственным функциям задачи (2.3)

$$W_1 = \sin(2\omega_1(k)t - 2kx)\sum_{i=1}^{\infty} d_i\varphi_i(z,2k) \tag{2.7}$$

Правую часть уравнения (2.5) можно представить в виде

$$\Phi(z,k) = N^2(z)\sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i(z,2k), \quad c_i = \int_{-H}^{0}\Phi(z,k)\varphi_i(z,2k)dz \tag{2.8}$$

Подставляя (2.7), (2.8) в (2.6) получим

$$d_i = \frac{c_i\omega_i^2(2k)}{4k^2(4\omega_1^2(k) - \omega_i^2(2k))}$$

Учитывая начальные условия, имеем

$$W_1=\sum_{i=1}^{\infty}d_i\varphi_i(z,2k)\left[\sin(2\omega_1(k)t-kx)-\frac{\omega_i(2k)\sin^2(2kx)+2\omega_1(k)\cos^2(2kx)}{\omega_i(2k)}\times\right.$$
$$\left.\times\sin(2\omega_1(k)t-2kx)-\frac{\sin(4kx)}{2\omega_i(2k)}(2\omega_1(k)-\omega_i(2k))\cos(2\omega_1(k)t-2kx)\right] \tag{2.9}$$

Из (2.9) видно, что наибольший вклад в W_1 дает слагаемое с множителем d_1. Сравним поправку W_1 с невозмущенным решением W_0. Для этого заменим первое слагаемое в (2.9) вековым (резонансным) членом (считая $\omega_1(2k) = 2\omega_1(k)$ [1,2]), чем только увеличим значение W_1

$$W_1^*=\frac{a_1\omega_1(2k)}{8k^2}\varphi_1(z,2k)t\cos(\omega_1(2k)t-2kx) \tag{2.10}$$

и оценим время, за которое W_1^* станет сравнимо с W_0. Для расчета коэффициента a_1 можно считать, что $\varphi_1(z,k)\approx\varphi_1(z,2k)$, что справедливо для достаточно малых значений k [1, 2, 5]. В результате получим

$$a_1=2A^2\left(-\frac{\omega_1(k)}{g}\int_{-H}^{0}N^2(z)\varphi_1(z,k)\left(\frac{\partial\varphi_1(z,k)}{\partial z}\right)^2dz-\frac{2k^2\omega_1(k)}{g}\int_{-H}^{0}N^2(z)(\varphi_1(z,k))^3dz+\right.$$
$$\left.+\frac{6k^2}{\omega_1(k)}\int_{-H}^{0}N^2(z)(\varphi_1(z,k))^2\frac{\partial\varphi_1(z,k)}{\partial z}dz-3\omega_1(k)k^2\int_{-H}^{0}(\varphi_1(z,k))^2\frac{\partial\varphi_1(z,k)}{\partial z}dz\right) \tag{2.11}$$

Чтобы воспользоваться формулами (2.10), (2.11), рассмотрим слой стратифицированной среды с глубиной $H = 100$ м, $N(z) = \mathrm{const} = 0.01$ с$^{-1}$, тогда $\varphi_1=\sqrt{2}\sin(\pi z/H)/N\sqrt{H}$. Далее, возьмем $k = 0.02$ м$^{-1}$, тогда длина волны $\lambda \sim 300$ м, и $A = 10^{-4}$ м$^{3/2}$ с$^{-2}$, что соответствует амплитуде скорости невозмущенной волны примерно 14 см/с. Для случая $N(z) = \mathrm{const}$ последние два слагаемых в (2.11) равны нулю, первые два интеграла вычисляются аналитически, и тогда $a_1=-1.4\cdot10^{-13}$. Оценим время t, за которое величина W_1^* будет составлять порядка 5% от значения W_0: $t = 4k^2A\cdot 0.05/c_1\omega_1(2k)\approx 1.5\cdot 10^7$ с, что существенно превышает типичные периоды колебаний внутренних гравитационных волн в океане, составляющих десятки минут [3,5,9].

Заключение. В диапазоне длин волн, характерном для реального океана, при исследовании динамики внутренних гравитационных волн можно пользоваться линейным приближением. Аналогично возможно оценить и влияние других поправок к линейной теории генерации и распространения внутренних гравитационных волн в стратифицированных средах. Результаты этих оценок показывают адекватность и обоснованность для соответствующих пространственно-временных масштабов линейной модели волновой динамики.

Выражаем благодарность рецензенту за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Внутренние гравитационные волны в неоднородных средах. М.: Наука, 2005. 195 с.
2. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Internal Gravity Waves: Theory and Applications. Moscow: Nauka, 2007. 304 c.

3. *Воляк К.И.* Избранные труды. Нелинейные волны в океане. М.: Наука, 2002. 486 с.
4. *Габов С.А.* Новые задачи математической теории волн. М.: Наука. Физматлит, 1998. 448 с.
5. *Miropol'skii Yu.Z., Shishkina O.V.* Dynamics of internal gravity waves in the ocean. Boston: Kluwer, 2001. 346 p.
6. *Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д.* Регулярные и сингулярные компоненты периодических течений в толще жидкости // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 5. С. 844–854.
7. *Gitterman M.* Hydrodynamics of compressible liquids: influence of the piston effect on convection and internal gravity waves // Physica A. 2007. V. 386. № 1. P. 1–11.
8. *Staquet C., Sommeria J.* Internal gravity wave: from instabilities to turbulence // Annu Rev. Fluid Mech. 2002. V. 34. P. 559–593.
9. *Morozov E.G.* Internal tides. Global field of internal tides and mixing caused by internal tides. Wein; N.Y.: Springer, 2006. 286 p.
10. *Островский Л.А., Потапов А.И.* Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит, 2003. 400 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.XII.2009