МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2010 год, том 22, номер 12, стр. 3-12

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ НЕОДНОРОДНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ СРЕД

В.В. Булатов, Ю.В. Владимиров

Учреждение Российской академии наук
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН bulatov@index-xx.ru

Настоящая работа посвящена изложению решения фундаментальной проблемы математического моделирования динамики океана и атмосферы, связанной с теоретическим изучением процессов возбуждения, распространения и эволюции негармонических пакетов внутренних гравитационных волн в неоднородных и нестационарных стратифицированных средах. Задача решена с помощью предложенного модифицированного пространственно-временного лучевого метода. Полученные решения представляют собой асимптотический ряд по нецелым степеням некоторого малого параметра.

Ключевые слова: стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, лучевой метод.

MODELING OF INHOMOGENEOUS AND NON-STATIONARY STRATIFIED MEDIUMS WAVE DYNAMICS

V.V. Bulatov, Yu.V. Vladimirov

The Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences

The problem of mathematical modeling of internal gravity non-harmonic wave packets propagated in a inhomogeneous and non-stationary stratified mediums (ocean, atmosphere) is considered. The modified space-time ray method of asymptotic solution is proposed. The key point of the proposed technique is the possibility to derive the asymptotic representation of the solution in terms of a non-integral degree series of the some small parameter.

Key words: stratified medium, internal gravity waves, ray method.

Введение

На распространение внутренних гравитационных волн в стратифицированных природных средах (океан, атмосфера) существенное влияние оказывает горизонтальная неоднородность и нестационарность этих сред. К числу наиболее характерных горизонтальных неоднородностей реального океана можно отнести изменение рельефа дна, неоднородность и нестационарность поля плотности, изменчивость средних течений. Точное аналитическое решение данной задачи, например, методом разделения переменных, получается только в том случае, если распределение плотности и форма дна описываются достаточно простыми модельными функциями [1-4]. Когда форма дна и стратификация произвольны, можно построить только асимптотические представления решения или решать задачу численно. Однако численное решение задачи не позволяет получать и анализировать качественные характеристики волновых полей на больших расстояниях, что необходимо для решения, например, проблемы обнаружения внутренних гравитационных волн дистанционными методами, в том числе с помощью средств аэрокосмической радиолокации [1, 2].

Математическое моделирование волновой динамики стратифицированных сред возможно с помощью модифицированного варианта пространственно-временного лучевого метода (метода геометрической оптики), при этом асимптотическое представление решения ищется в виде ряда по нецелым степеням некоторого малого параметра [1, 2, 5]. Конкретная форма этого представления определяется из асимптотических решений, описывающих волновую динамику в стационарном, горизонтально-однородном случае. При исследовании эволюции пакетов внутренних волн в стратифицированных средах с медленно меняющимися параметрами обычно предполагается, что этот волновой пакет является локально гармоническим. В отличие от большинства работ, посвященных исследованию данной проблемы, разработанный модифицированный метод геометрической оптики в виде разложения по некоторым специальным функциям дает возможность описывать структуру волновых полей вблизи и вдали от волновых фронтов. Полученные решения представляют собой разложения по волнам специального вида – волнам Эйри или Френеля и описывают не только эволюцию этих негармонических волновых пакетов, но и структуру волнового поля каждой отдельной моды как вблизи, так и вдали от волновых фронтов [1, 2].

Асимптотические представления решений о распространении негармонических волновых пакетов в среде с неоднородной по горизонтали и нестационарной плотностью, проведенные численные расчеты для типичных океанических параметров показывают существенное влияние факторов нестационарности и горизонтальной неоднородности параметров природных стратифицированных сред, влияющих на реальную динамику внутренних гравитационных волн [1, 2, 4].

Все результаты математического моделирования волновой динамики в настоящей работе получены для произвольных распределений плотности и других параметров неоднородных стратифицированных природных сред и рассматривались в контексте непротиворечивости имеющимся данным натурных измерений внутренних гравитационных волн в океане. Как оказалось, такого рода аналитические конструкции вполне наблюдаемы в условиях реального океана [4, 6].

Предлагаемые подходы к математическому моделированию волновой динамики негармонических пакетов внутренних гравитационных волн могут быть применимы к широкому классу физических задач, вполне адекватно описываемых этими методами. Значение таких методов анализа волновых полей определяется не только их наглядностью, универсальностью и эффективностью при решении разнообразных задач, но и тем, что они могут явиться некоторой полуэмпирической основой других приближенных методов в теории распространения волновых пакетов иной физической природы [1, 2, 5].

Постановка задачи

Если рассматривать внутренние гравитационные волны в случае, когда невозмущенное поле плотности $\rho_0(z,x,y)$ стратифицированной среды зависит не только от глубины z, но и от горизонтальных координат x и y, то исходной для математического моделирования волновой динамики является линеаризованная система уравнений гидродинамики [1–4]

$$
\begin{aligned}
&\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \\
&\rho_0 \frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \\
&\rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + g\rho, \\
&\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + w\frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь (u_1, u_2, w) – вектор скорости внутренних гравитационных волн, p и ρ – возмущения давления и плотности, g – ускорение силы тяжести (ось z направлена вниз). Используя приближение Буссинеска, означающее, что плотность $\rho_0(z,x,y)$ в первых трех уравнениях (1) считается постоянной величиной [1–4], систему (1) приведём к виду

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial t^2} + \Delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{g}{\rho_0} \Delta \left(u_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + w\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right) = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta u_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta u_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y}\right) = 0, \\
&\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 .
\end{aligned}
\tag{2}
$$

В качестве граничных условий используется приближение "твердой крышки": w=0 при z=0 и условие непротекания на дне $z = H(x, y)$: $w + \frac{\partial H}{\partial x} u_1 + \frac{\partial H}{\partial y} u_2 = 0$ [1–4].

Выбор модельного вида решения

Вначале рассмотрим гармонические волны $(u_1, u_2, w) = e^{i\omega t}(U_1, U_2, W)$. Введем безразмерные переменные по формулам: $x^* = \frac{x}{L}$, $y^* = \frac{y}{L}$, $z^* = \frac{z}{h}$, $g^* = \frac{g}{h}$, где L – характерный масштаб изменения параметров стратифицированной среды по горизонтали, h – характерный масштаб изменения плотности по вертикали (например, ширина термоклина) [1, 2]. В безразмерных координатах система уравнений (2) будет иметь вид (знак $*$ далее опускается)

$$-\omega^2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+\varepsilon^2\Delta W\right)+\varepsilon^2\frac{g}{\rho_0}\left(\varepsilon U_1\frac{\partial\rho_0}{\partial x}+\varepsilon U_2\frac{\partial\rho_0}{\partial y}+W\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\right)=0\,,$$

$$\varepsilon\Delta U_1+\frac{\partial^2 W}{\partial z\partial x}=0\,,\qquad \varepsilon\Delta U_2+\frac{\partial^2 W}{\partial z\partial y}=0\,, \tag{3}$$

$$\varepsilon=\frac{h}{L}<<1\,.$$

Тогда асимптотическое решение системы (3) можно искать в виде, типичном для метода геометрической оптики [1, 2]

$$\mathbf{V}(z,x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}(i\varepsilon)^m\mathbf{V}_m(z,x,y)\exp\bigl(S(x,y)/i\varepsilon\bigr), \tag{4}$$

$$\mathbf{V}(z,x,y)=(U_1(z,x,y),U_2(z,x,y),W(z,x,y))\,.$$

Функции $S(x,y)$ и V_m, m=0,1,… подлежат определению. В дальнейшем, как правило, ограничиваются нахождением только главного члена разложения (4) [1, 2, 5].

Определение фазовых характеристик волновых полей

После подстановки (5) в первое уравнение системы (4) для определения, например, функции $W_0(z,x,y)$, можно получить краевую задачу [1, 2, 4, 7]

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial z^2}+|\nabla S|^2\left(\frac{N^2(z,x,y)}{\omega^2}-1\right)W_0=0\,, \tag{5}$$

$$W_0(0,x,y)=W_0(H,x,y)=0\,,$$

где $N^2(z,x,y)=\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial z}$ – частота Брента-Вяйсяля. Краевая задача (5) имеет счетный набор собственных функций W_{0n} и собственных чисел $K_n(x,y)\equiv|\nabla S_n|$, которые предполагаются известными, и в случае произвольной функции $N^2(z,x,y)$ может быть решена только численно [4, 7]. Далее индекс n опускается, и все дальнейшие выкладки относятся к отдельно взятой моде. Для определения функции $S(x,y)$ получим уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2=K^2(x,y)\,. \tag{6}$$

Начальные условия для эйконала S в плоском случае задаются на линии: $L:x_0(\alpha),y_0(\alpha)$, $S(x,y)\big|_L=S_0(\alpha)$. Для решения уравнения эйконала строятся лучи (характеристики) уравнения (6) [1, 2, 4, 5]

$$\frac{dx}{d\sigma}=\frac{p}{K(x,y)}, \qquad \frac{dp}{d\sigma}=\frac{\partial K(x,y)}{\partial x}, \tag{7}$$

$$\frac{dy}{d\sigma}=\frac{q}{K(x,y)}, \qquad \frac{dq}{d\sigma}=\frac{\partial K(x,y)}{\partial y},$$

где $p=\partial S/\partial x$, $q=\partial S/\partial y$, $d\sigma$ – элемент длины луча.

Начальные условия p_0 и q_0 для решения характеристической системы (7) определяются из системы

$$p_0\frac{\partial x_0}{\partial\alpha}+q_0\frac{\partial y_0}{\partial\alpha}=\frac{\partial S_0}{\partial\alpha},$$

$$p_0^2+q_0^2=K^2(x_0(\alpha),y_0(\alpha)).$$

Уравнения (7) и начальные условия $x_0(\alpha)$, $y_0(\alpha)$, $p_0(\alpha)$, $q_0(\alpha)$ определяют луч $x=x(\sigma,\alpha)$, $y=y(\sigma,\alpha)$. После нахождения лучей эйконал S определяется интегрированием вдоль луча: $S=S_0(\alpha)+\int_0^\sigma K(x(\sigma,\alpha),\, y(\sigma,\alpha))d\sigma$ [1, 2, 4, 7].

Определение амплитудных характеристик волновых полей

Перейдем к нахождению функции $W_0(z,x,y)$. Из краевой задачи (5) можно определить только вертикальную зависимость функции $W_0(z,x,y)$, то есть функция W_0 определяется с точностью до некоторой произвольной функции $A_0(x,y)$. Будем искать W_0 в виде $W_0(z,x,y)=A_0(x,y)f_0(z,x,y)$, где $f_0(z,x,y)$ – решение задачи (6), нормированное следующим образом: $\int_0^H (N^2(z,x,y)-\omega^2)f_0^2(z,x,y)dz=1$. Приравняем после подстановки (4) в (3) члены порядка $O(\varepsilon)$, в результате можно получить

$$\omega^2\left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial z^2}+K^2\left(\frac{N^2(z,x,y)}{\omega^2}-1\right)W_1\right)= \tag{8}$$

$$=(\omega^2-N^2)\left(2\nabla W_0\Delta S+W_0\Delta S\right)+\frac{g}{\rho_0}\left(\nabla S\nabla\rho_0\right)\frac{\partial W_0}{\partial z}-2(\nabla N^2\nabla S)\,W_0.$$

Далее воспользуемся условием ортогональности правой части этого уравнения к функции $W_0(z,x,y)$. Домножая (8) на W_0 и интегрируя по z от 0 до H, после ряда довольно громоздких аналитических выкладок можно получить уравнение переноса для определения амплитудной зависимости $A_0(x,y)$ в виде [1, 2, 4, 7]

$$\nabla A_0^2\nabla S+A_0^2\Delta S-3\nabla S\nabla\ln K=0. \tag{9}$$

Уравнение переноса (11) будем решать на характеристиках уравнения эйконала (6).

Используя выражение для ΔS вдоль лучей: $\Delta S = \frac{1}{J}\frac{d}{d\sigma}(JK)$, где $J(x,y)$ – геометрическая расходимость лучей характеристической системы (7), уравнение переноса (11) приводится к следующему закону сохранения вдоль лучей:

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\ln\frac{A_0^2(x,y)J(x,y)}{K^2(x,y)}\right)=0. \tag{10}$$

Закон сохранения (10) можно записать также в виде, удобном для нахождения функции A_0

$$\frac{A_0^2\big(x(\sigma,\alpha),y(\sigma,\alpha)\big)}{K^2\big(x(\sigma,\alpha),y(\sigma,\alpha)\big)}da\big(x(\sigma,\alpha),y(\sigma,\alpha)\big)\equiv E(\sigma,\alpha), \tag{11}$$

где $da\big(x(\sigma,\alpha),y(\sigma,\alpha)\big)=J\big(x(\sigma,\alpha),y(\sigma,\alpha)\big)d\alpha$ – ширина элементарной лучевой трубки. Здесь $E(\sigma,\alpha)$ – некоторая функция, определяемая конкретным видом решаемой задачи, и которую можно найти, используя принцип локальности и соответствующие решения задачи о распространении негармонических волновых пакетов в стратифицированной среде с неизменными по времени и по горизонтали параметрами [1, 2]. Отметим, что поток волновой энергии пропорционален $A_0^2K^{-1}da$, поэтому из этого выражения видно, что в данном случае сохраняется величина, равная потоку волновой энергии, деленной на модуль волнового вектора.

Выбор модельного решения в виде негармонических волновых пакетов

Далее рассмотрим суперпозицию гармонических волн (в медленных переменных x, y, t) [1, 2]

$$W=\int\omega\sum_{m=0}^{\infty}(i\varepsilon)^m W_m(\omega,z,x,y)\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\big[\omega t-S_m(\omega,x,y)\big]\right)d\omega. \tag{12}$$

Относительно функций $S_m(\omega,x,y)$ предполагается, что они нечетные по ω и $\min\limits_{\omega}\partial S/\partial\omega$ достигается при $\omega=0$ (для всех x и y). Поэтому модельными интегралами $R_m(\sigma)$ для отдельных слагаемых в (12), которые описывают негармонические волны Эйри, будут следующие выражения [1, 2, 5]:

$$R_m(\sigma)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{i}{\omega}\right)^{m-1}\exp\left(i\frac{\omega^3}{3}-i\omega\sigma\right)d\omega,$$

где контур интегрирования обходит точку $\omega=0$ сверху, чем обеспечивается экспоненциальное затухание функций $R_m(\sigma)$ при $\sigma<<1$. Функции $R_m(\sigma)$ обладают свойством:

$$\frac{dR_m(\sigma)}{d\sigma}=R_{m-1}(\sigma),$$

при этом $R_0(\sigma)=Ai'(\sigma)$, $R_1(\sigma)=Ai(\sigma)$ – функция Эйри [1, 2], $R_2(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\sigma} Ai(u)\,du$. Исходя из соответствующих свойств интегралов Эйри, можно показать, что функции $R_m(\sigma)$ связаны между собой следующими рекуррентными соотношениями: $R_{-1}(\sigma)+\sigma R_1(\sigma)=0$, $R_{-3}(\sigma)+2R_0(\sigma)-\sigma^2 R_1(\sigma)=0$ [1, 2]. В качестве модельных интегралов $R_m(\sigma)$, описывающих распространение негармонических волн Френеля, используются следующие выражения [1, 2]:

$$R_0(\sigma)=\mathrm{Re}\int\limits_0^{\infty}\exp\left(-it\sigma-i\frac{t^2}{2}\right)dt,$$

$$R_{-1}(\sigma)+i\sigma R_0(\sigma)=0, \qquad R_{-3}(\sigma)-2iR_{-1}(\sigma)-i\sigma R_{-2}(\sigma)=0.$$

Исходя из вышеизложенного, а также из структуры первого члена равномерной асимптотики волн Эйри и Френеля в однородной по горизонтали среде, решение системы (3), например, можно искать в виде (для отдельно взятой моды W_n, $\mathbf{U}_n$, опуская ее индекс n)

$$W=\varepsilon^0 W_0(z,x,y,t)R_0(\sigma)+\varepsilon^a W_1(z,x,y,t)R_1(\sigma)+\varepsilon^{2a}W_2(z,x,y,t)R_2(\sigma)+\dots\ ,$$

$$\mathbf{U}=\varepsilon^{1-a}\mathbf{U}_0(z,x,y,t)R_1(\sigma)+\varepsilon\mathbf{U}_1(z,x,y,t)R_2(\sigma)+\varepsilon^{1+a}\mathbf{U}_2(z,x,y,t)R_3(\sigma)+\dots\ ,$$

где аргумент $\sigma=\left(\frac{1}{a}S(x,y,t)\right)^a\varepsilon^{-a}$ считается порядка единицы. Данные разложения вполне согласуются с общим подходом метода геометрической оптики и пространственно-временного лучевого метода для сред с медленно меняющимися параметрами [1, 2, 4, 5].

Отметим также, что из подобной структуры решения следует, что в неоднородной по горизонтали и нестационарной среде решение будет зависеть как от "быстрых" (вертикальная координата), так и от "медленных" (время и горизонтальные координаты) переменных. Далее, как правило, будем искать решение в "медленных" переменных, при этом те структурные элементы решения, которые зависят от "быстрых" переменных, получаются в виде интегралов от некоторых медленно меняющихся функций вдоль пространственно-временных лучей.

Данный выбор решения позволяет описать равномерную асимптотику полей внутренних гравитационных волн, распространяющихся в стратифицированных средах с медленно меняющимися параметрами, верную как вблизи, так и вдали от волновых фронтов отдельной волновой моды. Если необходимо описать поведение поля только вблизи волнового фронта, то можно использовать один из модификаций метода геометрической оптики – метод «бегущей волны». Тогда аргумент фазовых функций σ может быть представлен в виде: $\sigma=\alpha(t,x,y)(S(t,x,y)-\varepsilon t)\varepsilon^{-a}$. Функция $S(t,x,y)$ в данном случае описывает положение волнового фронта и определяется из решения уравнения эйконала: $\nabla^2 S=c^{-2}(x,y,t)$, где $c(t,x,y)$ – максимальная групповая скорость соответствующей волновой моды [1, 2]. Функция $\alpha(t,x,y)$ описывает пространственно-временную эволюцию ширины импульса негармонических пакетов и определяется из законов сохранения вдоль характеристик уравнения эйконала, конкретный вид которых определяется физическими условиями решаемых задач.

Общий алгоритм математического моделирования волновой динамики стратифицированных сред

Таким образом, имеем следующую общую схему расчета волновых полей внутренних гравитационных волн в неоднородных и нестационарных стратифицированных средах:

1) численно методом стрельбы решается основная вертикальная спектральная задача (5) и определяются нормированные собственные функции и собственные числа [7];

2) численно, например методом Рунге-Кутта, решается характеристическая система (6) с соответствующими начальными условиями;

3) после нахождения характеристик (лучей), эйконал (значение фазы) S фазовой функции $R_0(S)$ определяется численным интегрированием вдоль этих лучей [1, 2];

4) геометрическая расходимость лучевой трубки J в (10) определяется, например, численным дифференцированием близко расположенных характеристик [1, 2, 4, 5];

5) амплитуда $A_0(x,y)$ вычисляется из (11), где правая часть равенства определяется с помощью принципа локальности, то есть предполагается, что на расстояниях порядка нескольких толщин слоя и при некоторых характерных временных интервалах, параметры среды можно считать локально постоянными по времени и неизменными по горизонтали [1, 2, 5]. Таким образом, на этих пространственно-временных масштабах предполагается, что стратифицированная среда является локально однородной и стационарной и произвольно зависит от вертикальной координаты. В этом случае функцию, стоящую в правой части (11), можно вычислить, предполагая локальное постоянство глубины и плотности с "замороженными" по горизонтали и времени горизонтальными параметрами [1, 2, 4, 5].

Результаты численных расчетов

На рисунках представлены результаты численных расчетов первой моды вертикальной скорости внутренних гравитационных волн для одного из самых характерных случаев неоднородности параметров океана по горизонтали, а именно, распространение волн в зоне океанического шельфа [4, 6]. На рис.1 представлена лучевая картина, из которой видно, что рассчитанная структура характеристик является достаточно сложной и представляет собой систему как падающих (сплошная линия), так и отраженных (пунктирная линия) лучей, штриховой линией изображена каустика, то есть огибающая семейства лучей. Изображенные лучи соответствуют шагу по фазе, отвечающему первым шести корням уравнения $dR_0(S)/dS = 0$, то есть первым шести локальным максимумам (по амплитуде) негармонического волнового пакета [1, 2]. Волновое поле вблизи каустики изменяется качественно, а именно, происходит переход из области «света», то есть области пространства, где волновые поля существуют, в область «тени», где эти поля малы, причем каждой точке каустики соответствует определенный луч, касающийся ее в данной точке.

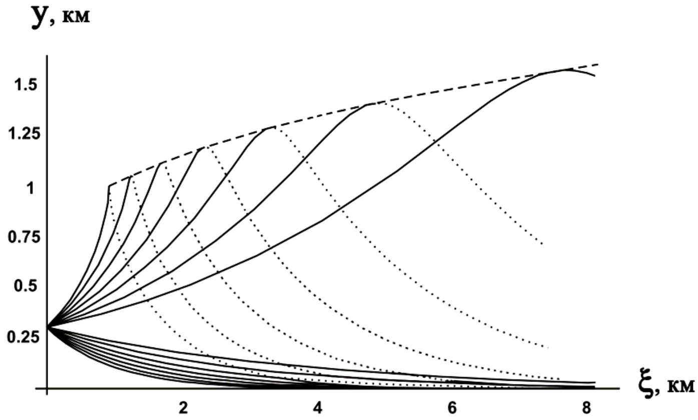

Рис.1. Лучевая структура волнового поля.

Общим правилом является то, что каустика семейства лучей отделяет область пространства, куда лучи данного семейства не попадают, от области, в каждую точку которой приходят два луча: один, уже коснувшийся каустики, и другой, только приближающийся к ней. Формальные асимптотические разложения, которые были использованы в работе, становятся неприменимыми, так как в этой области лучи сливаются друг другом, отражаясь от каустических поверхностей. Для того чтобы найти асимптотические представления волновых полей вблизи каустики, необходимо строить специальные разложения решений и, например, использовать метод эталонных интегралов [1, 2, 4, 5].

На рис.2 представлены результаты расчетов амплитудно-фазовой картины волновых полей. Из представленных численных результатов видно, что, действительно, вне каустики волновое поле достаточно мало и не испытывает большого числа осцилляций, в то время, как внутри каустической зоны волновая картина представляет собой достаточно сложную систему падающих и отраженных волновых гармоник.

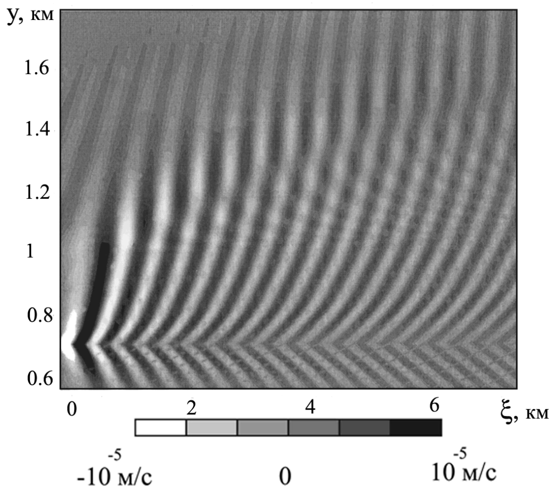

Рис.2. Первая мода вертикальной скорости внутренних гравитационных волн.

Заключение

Таким образом, универсальный характер предложенных асимптотических методов, подходов и численных алгоритмов математического моделирования негармонических пакетов внутренних гравитационных волн позволяет эффективно рассчитывать волновые поля на больших расстояниях, кроме того, имеется возможность качественного анализа получаемых решений. Тем самым, открываются широкие возможности анализа волновых картин в целом, что важно, как для правильной постановки математических моделей волновой динамики, так и для проведения оценочных расчетов при натурных измерениях волновых полей в океане. Особая роль предлагаемых асимптотических методов обусловлена тем обстоятельством, что параметры природных стратифицированных сред, как правило, известны приближенно, и попытки точного численного решения исходных уравнений гидродинамики с использованием таких параметров могут привести к заметной потере точности получаемых результатов. Помимо большого физического интереса, полученные асимптотические построения могут представлять значительную ценность для приложений, поскольку предложенный модифицированный метод геометрической оптики позволяет решать задачу математического моделирования волновых полей в весьма широком классе задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булатов В.В.*, *Владимиров Ю.В.* Внутренние гравитационные волны в неоднородных средах. - М.: Наука, 2005, 195 с.
2. *Bulatov V.V.*, *Vladimirov Yu.V.* Internal gravity waves: theory and applications. - М.: Наука, 2007, 304 с.
3. *Габов С.А.* Новые задачи математической теории волн. - М.: Наука, 1998, 448 с.
4. *Miropol'skii Yu.Z.*, *Shishkina O.V.* Dynamics of internal gravity waves in the ocean. - Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001, 346 p.
5. *Островский Л.А.*, *Потапов А.И.* Введение в теорию модулированных волн. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003, 400 с.
6. *Морозов Е.Г.*, *Нечволодов Л.В.* Лучевое распространение внутренних приливов над континентальным склоном // Известия Академии инженерных наук Российской Федерации, 2006, т.18, с.33-40.
7. *Булатов В.В.*, *Владимиров Ю.В.* О расчете собственных функций и дисперсионных кривых основной вертикальной спектральной задачи уравнения внутренних гравитационных волн // Математическое моделирование, 2007, т.19, №2, с.59-68.

Поступила в редакцию 07.04.10